Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. Р. ШУРА-БУРА

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОДНОГО ИНТЕГРАЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ПРОИЗВЕДЕНИЕ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 16 VI 1950)

При исследовании некоторых потоков идеальной несжимаемой жидкости, обладающих осевой симметрией, появляются несобственные интегралы, содержащие произведения бесселевых функций $J_0(bx)$, $J_1(cx)$ на e^{-ax} ([1, 2]). В ([2]) эти интегралы выражены с помощью комбинаций эллиптических интегралов первого и второго родов как полных, так и неполных.

Применяя другой метод приведения к эллиптическим интегралам, можно показать, что для положительных значений параметров a, b, c имеет место следующее соотношение:

$$\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt) J_1(ct)\, dt = \frac{1}{c}\left(1 - \Lambda_0(\alpha, \beta)\right), \tag{1}$$

где $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ выражаются алгебраически через параметры a, b, c, а $\Lambda_0(\alpha, \beta)$ — табулированная в ([3]) функция, отличающаяся от полного эллиптического интеграла третьего рода лишь коэффициентом, зависящим от параметров интеграла (см. ([3]), 5, 6).

Интеграл, стоящий слева в (1), является одним из рассмотренных в ([2]) интегралов. Соотношение (1) позволяет представить и другие рассмотренные в ([2]) интегралы в более простой для вычислений форме.

Целью настоящей заметки является вывод соотношения (1).

Заменяя в (1) слева бесселеву функцию $J_0(bt)$ ее выражением через интеграл Пуассона (([4]), 2.3, формула 21), получим:

$$\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt) J_1(ct)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(e^{-at} J_1(ct) \int_0^\pi e^{ibt\cos\varphi}\, d\varphi\right) dt.$$

Здесь можно изменить порядок интегрирования, и поэтому:

$$\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt) J_1(ct)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^\infty e^{-(a-ib\cos\varphi)\,t} J_1(ct)\, dt\right) d\varphi.$$

В силу того, что

$$\int_0^\infty e^{-kt} J_1(ct)\, dt = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{k^2 + c^2}}\right)$$

(([4]), 13.2, формула 6), имеем:

$$\int\limits_0^\infty e^{-at} J_0(bt)\, J_1(ct)\, dt = \frac{1}{c}\left[1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{a - ib\cos\varphi}{\sqrt{(a - ib\cos\varphi)^2 + c^2}}\, d\varphi\right]. \qquad (2)$$

Вычислим интеграл I в правой части последнего равенства. Разбивая искомый интеграл на сумму интегралов от 0 до $\pi/2$ и от $\pi/2$ до π и проведя в последнем подстановку $\varphi = \pi - \psi$, получим:

$$I = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{a - ib\cos\varphi}{\sqrt{(a - ib\cos\varphi)^2 + c^2}} + \frac{a + ib\cos\varphi}{\sqrt{(a + ib\cos\varphi)^2 + c^2}}\right] d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{Re}\frac{a + ib\cos\varphi}{\sqrt{(a + ib\cos\varphi)^2 + c^2}}\, d\varphi. \qquad (3)$$

Вычисляя действительную часть выражения, стоящего под знаком интеграла, приходим к следующей формуле:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{a\sqrt{\sqrt{(a^2 - b^2\cos^2\varphi + c^2)^2 + 4a^2b^2\cos^2\varphi} + a^2 - b^2\cos^2\varphi + c^2}}{\sqrt{(a^2 - b^2\cos^2\varphi + c^2)^2 + 4a^2b^2\cos^2\varphi}} + \right.$$

$$\left. + \frac{b\cos\varphi\sqrt{\sqrt{(a^2 - b^2\cos^2\varphi + c^2)^2 + 4a^2b^2\cos^2\varphi} - a^2 + b^2\cos^2\varphi - c^2}}{\sqrt{(a^2 - b^2\cos^2\varphi + c^2)^2 + 4a^2b^2\cos^2\varphi}}\right] d\varphi.$$

Обозначая выражение $a^2 - c^2 + b^2\cos^2\varphi$ через y и замечая, что $(a^2 - b^2\cos^2\varphi + c^2)^2 + 4a^2b^2\cos^2\varphi = (a^2 - c^2 + b^2\cos^2\varphi)^2 + 4a^2c^2$, запишем искомый интеграл следующим образом:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_1^{\pi/2}\frac{a\sqrt{\sqrt{y^2 + 4a^2c^2} - y + 2a^2} + b\cos\varphi\sqrt{\sqrt{y^2 - 4a^2c^2} + y - 2a^2}}{\sqrt{y^2 + 4a^2c^2}}\, d\varphi.$$

Сделаем замену переменного $x = y + \sqrt{y^2 + 4a^2c^2}$. Тогда $\sqrt{y^2 + 4a^2c^2} - y = 4a^2c^2x^{-1}$ и $2y = x - 4a^2c^2x^{-1}$. Кроме того, $dy = -2b^2\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi$ и $(y^2 + 4a^2c^2)^{-1/2}\, dy = x^{-1}\, dx$, т. е. $(y^2 + 4a^2c^2)^{-1/2}\, d\varphi = -(2b^2\, x\cos\varphi\sin\varphi)^{-1}\, dx$. Далее: $2b^2\cos^2\varphi = x - 4a^2c^2x^{-1} - 2a^2 + 2c^2 = x^{-1}(x - 2a^2)(x + 2c^2)$, $2b^2\sin^2\varphi = -x + 4a^2c^2x^{-1} + 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 = x^{-1}(x_1 - x)(x + x_2)$, где $x_1 = \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2) + 4a^2c^2} + a^2 + b^2 - c^2$ и $x_2 = \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4a^2c^2} - a^2 - b^2 + c^2$.

Отсюда

$$2b^2x\cos\varphi\sin\varphi = \sqrt{(x - 2a^2)(x + 2c^2)(x_1 - x)(x + x_2)}.$$

Переменное x принимает при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, соответственно, значения x_1 и $2a^2$, причем $2a^2 < x < x_1$. В силу этого

$$I = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{x_1}^{2a^2}\frac{a\sqrt{4a^2c^2x^{-1} + 2a^2} + (2x)^{-1/2}\sqrt{(x - 2a^2)(x + 2c^2)}\sqrt{x - 2a^2}}{\sqrt{(x - 2a^2)(x + 2c^2)(x_1 - x)(x + x_2)}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{2a^2}^{x_1}\frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{(x_1 - x)(x - 2a^2)(x + x_2)}}.$$

Приводя полученный интеграл к канонической форме эллиптического интеграла, получим:

$$I = \frac{4a^2}{\pi \sqrt{x_1(x_2+2a^2)}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(1-p\sin\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

где

$$p = \frac{x_1 - 2a^2}{x_1} \quad \text{и} \quad k^2 = \frac{x_1 - 2a^2}{x_1} \, \frac{x_2}{x_2 + 2a^2}.$$

Так как $k^2 < p < 1$ и $\dfrac{2a^2}{\sqrt{x_1(x_2+2a^2)}} = \sqrt{(1-p)\left(1-\dfrac{k^2}{p}\right)}$, то (см. [3])

$$I = \Lambda_0(\alpha, \beta),$$

где параметры α и β определяются из соотношений

$$\sin^2\alpha = \frac{x_1 - 2a^2}{x_1} \, \frac{x_2}{x_2 + 2a^2}, \qquad \sin^2\beta = \frac{x_1}{x_1 + x_2}.$$

Подставляя найденное значение интеграла (3) в формулу (2), получим доказываемое соотношение (1).

Поступило
28 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Weinstein, Quarterly Appl. Math., 5, No. 4 (1948). [2] A. Van Tuyl, ibid., 7, No. 4 (1950). [3] Carl Neuman, Journ. Math. and Phys. Massachusets Inst. Technology, 20, No. 2 (1941). [4] Д. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, М., 1949.