Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. К. ФАГЕ

ИДЕМПОТЕНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ СПРЯМЛЕНИЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 VI 1950)

В этой статье рассматриваются ограниченные идемпотентные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{E}$ произвольной размерности. Основной результат (теорема 7) состоит в установлении условий, при которых идемпотентное разложение единицы спрямляемо, т. е. подобно проекторному разложению единицы.

§ 1. Идемпотентный оператор. Ограниченный линейный оператор J называется идемпотентным, если $J^2 = J$. Сопряженный оператор J^* будет идемпотентным вместе с J. Определим их неподвижные подпространства $\mathfrak{H} = \{x, Jx = x\}$, соответственно $\mathfrak{G} = \{x, J^*x, = x\}$. Связь J с $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$ укажем так: $J = \mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$. Так как $(J^*)^* = J$, то $J^* = \mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$.

Замечание 1. Из $J^2 = J$ следует, что $\mathfrak{H}$ есть J — образ всего $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H} = J\mathfrak{E}$; аналогично $\mathfrak{G} = J^*\mathfrak{E}$.

Векторы, преобразуемые оператором в нуль, составляют подпространство, называемое нулевым. Легко доказывается теорема 1:

Теорема 1. *Нулевые подпространства операторов J и J^* равны ортогональным дополнениям $\mathfrak{E} \ominus \mathfrak{G}$, соответственно $\mathfrak{E} \ominus \mathfrak{H}$, и являются неподвижными подпространствами для дополнительных операторов $I - J$, соответственно $I - J^*$ (I — единичный оператор), т. е. $I - J = (\mathfrak{E} \ominus \mathfrak{G})(\mathfrak{E} \ominus \mathfrak{H})$.*

В силу этой теоремы для определения идемпотентного оператора $J = \mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ достаточно знать, как он действует на векторы из $\mathfrak{G}$. Ответ дает теорема 2.

Теорема 2. *Идемпотентный оператор $J = \mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ взаимно-однозначно и взаимно-непрерывно отображает $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{H}$, причем обратное отображение есть проектирование $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{G}$. Таким образом, если $h \in \mathfrak{H}$, $g \in \mathfrak{G}$, то $GJg = g$, $JGh = h$, где G есть проектор на $\mathfrak{G}$ (т. е. идемпотентный оператор $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$). Аналогично: $HJ^*h = h$, $J^*Hg = g$, где $H = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ есть проектор на $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Имеем $J(Jg - g) = 0$ и, по теореме 1, $Jg - g \perp \mathfrak{G}$, откуда $g = GJg$. Далее, $h - Gh \perp \mathfrak{G}$ и, по той же теореме, $J(h - Gh) = 0$, откуда $h = JGh$.

В этой теореме содержится необходимость следующего условия:

Теорема 3. *Для того чтобы два подпространства $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$ определяли идемпотентный оператор $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$, необходимо и достаточно, чтобы проектированием одного из них (например, $\mathfrak{H}$) на другое ($\mathfrak{G}$) однократно покрывалось все последнее.*

Достаточность условия следует из теоремы Банаха (([1], стр. 34) об обращении оператора.

Из теоремы 1 следует $J(I - G) = 0$, $J = JG$; отсюда для произвольного $x \in \mathfrak{E}$ получим $\| Jx \| : \| x \| = \| Jg \| : \| x \|$, где $g = Gx \in \mathfrak{G}$. Поэтому, если $x \bar{\in} \mathfrak{G}$, то $\| Jx \| : \| x \| < \| Jg \| : \| g \|$. Так как по теореме 2 $g = GJg$ есть проекция Jg на $\mathfrak{G}$, то $\| Jg \| : \| g \| \geqslant 1$.

Итак, получена теорема 4:

Теорема 4. *Норма* $|J| = \sup_{x \in \mathfrak{E}}\{\|Jx\| : \|x\|\}$ *идемпотентного оператора* $J = \mathfrak{H}\times\mathfrak{G} \neq 0$ *всегда* $\geqslant 1$ *и равна* $\sup_{g\in\mathfrak{G}}\{\|Jg\| : \|g\|\}$. *Если, в частности,* $\mathfrak{G}$ *конечномерно, то норма достигается на некотором направлении в* $\mathfrak{G}$, *т. е.* $|J| = \|Jg_0\|$, *где* $g_0 \in \mathfrak{G}$, $\|g_0\| = 1$ *.

Легко доказываются условия проекционности идемпотентного оператора:

Теорема 5. *Для того чтобы идемпотентный оператор* $J = \mathfrak{H}\times\mathfrak{G}$ *был проектором (т. е.* $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$), *необходимо и достаточно каждое из следующих условий*: 1) $J = J^*$; 2) $|J| = 1$; 3) $JJ^* = J^*J$.

§ 2. Идемпотентное разложение единицы. Последовательность идемпотентных операторов $J_n = \mathfrak{H}_n\times\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ назовем идемпотентным разложением единицы, если: 1) J_n попарно „ортогональны" (в смысле $J_nJ_m = 0$ при $n \neq m$) и 2) для любого $x \in \mathfrak{E}$ имеем в сильном смысле $\lim_{n\to\infty}(J_1x + J_2x + \ldots + J_nx) = x$. При $J_n = 0$ для $n > N$ получаем конечное идемпотентное разложение единицы, для которого условие 2) принимает вид: $J_1 + J_2 + \ldots + J_N = I$. В этом случае последующие рассуждения несколько упростились бы; мы не будем его рассматривать отдельно. При условии 1) оператор $\mathfrak{J}_n = J_1 + J_2 + \ldots + J_n$ является идемпотентным и условие 2) равносильно следующим двум: 2а) нормы $|\mathfrak{J}_n|$ равномерно ограничены; 2б) совокупность подпространств $\{\mathfrak{H}_n\}$ замкнута в том смысле, что их сумма (т. е. наименьшее содержащее их подпространство) равна всему $\mathfrak{E}$. Так как замкнутость равносильна полноте $\{\mathfrak{H}_n\}_1^\infty$ в смысле несуществования $x \neq 0$, x перпендикулярно всем $\mathfrak{H}_n$, то тогда и $\{\mathfrak{G}_n\}_1^\infty$ замкнута: если x перпендикулярно всем $\mathfrak{G}_n$, то $J_nx = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x = 0$. Так как, кроме того, $J_n^*J_m^* = 0$ при $n \neq m$, $\mathfrak{J}_n^* = J_1^* + J_2^* + \ldots + J_n^*$ и $|\mathfrak{J}_n^*| = |\mathfrak{J}_n|$, то доказана теорема 6:

Теорема 6. *Сопряженная последовательность* $\{J_n^*\}_1^\infty$ *образует идемпотентное разложение единицы одновременно с* $\{J_n\}_1^\infty$.

Если S есть ограниченный линейный оператор с ограниченным обратным S^{-1}, то семейство операторов $J_n' = SJ_nS^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будет также идемпотентным разложением единицы, которое назовем подобным $\{J_n\}_1^\infty$. Идемпотентное разложение единицы, подобно проекторному разложению единицы, назовем спрямляемым.

Теорема 7. *Для спрямляемости идемпотентного разложения единицы* $\{J_n\}_1^\infty$ *необходимо и достаточно существование положительной постоянной C такой, что для всех* $x \in \mathfrak{E}$ *будем иметь:*

$$C^{-1}\|x\|^2 \leqslant \sum_1^\infty \|J_nx\|^2 \leqslant C\|x\|^2.$$

Необходимость. Если $J_n = SP_nS^{-1}$, где P_n — проекторы, то

$$\sigma = \sum_1^\infty \|J_nx\|^2 = \sum_1^\infty \|SP_nS^{-1}x\|^2 \leqslant |S|^2 \sum_1^\infty \|P_nS^{-1}x\|^2 = |S|^2\|S^{-1}x\|^2 \leqslant C\|x\|^2,$$

где $C = |S|^2|S^{-1}|^2$; аналогично: $\sigma \geqslant C^{-1}\|x\|^2$.

Достаточность. Сумма ряда $\sum_1^\infty \|J_nx\|^2 = \sum_1^\infty (J_n^*J_nx, x)$ определяет квадратичную форму $A(x, x) = (Ax, x)$ положительного само-

---

* Для $L_2[0, 1]$ вторая часть теоремы получена (в терминах биортогональных систем) В. Я. Козловым (2). Его результат (лемма 1) можно усилить, добавив к словам «можно найти в виде» слова «и только в этом виде», так как на векторах $x \overline{\in} \mathfrak{G}$ отношение $\|Jx\| : \|x\|$ не может достичь максимума.

сопряженного оператора A, причем из условия теоремы следует ограниченность его и ему обратного A^{-1}.

Из положительности оператора $A-(J_1^*J_1+\ldots+J_m^*J_m)$ следует сильная сходимость: $J_1^*J_1x+\ldots+J_m^*J_mx\Rightarrow Ax$ при $m\to\infty$; применяя здесь J_n^* получим $J_n^*J_nx=J_n^*Ax$, т. е. $J_n^*A=J_n^*J_n$ есть самосопряженный оператор и поэтому $J_n^*A=AJ_n$; умножая это равенство слева и справа на положительный квадратный корень $T=\sqrt{A^{-1}}$, найдем $TJ_n^*S=SJ_nT$, где $S=AT=TA=\sqrt{A}=T^{-1}$, т. е. $P_n=SJ_nT=(SJ_nT)^*$ есть самосопряженный идемпотентный оператор (проектор). Теорема доказана. Можно показать, что A^{-1} имеет квадратичную форму $(A^{-1}x,x)=\sum\limits_1^\infty\|H_nx\|^2=\sum\limits_1^\infty(H_nx,x)$, где H_n суть проекторы на $\mathfrak{H}_n$.

Замечание 2. В условиях теоремы 7 допустимые C не ограничены сверху, но $\geqslant 1$. Для того чтобы данное разложение единицы $\{J_n\}_1^\infty$ было само проекторным (т. е. все $\mathfrak{H}_n=\mathfrak{G}_n$), необходимо и достаточно, чтобы наименьшее C равнялось 1. Необходимость очевидна, достаточность следует из того, что тогда $\|J_nx\|^2\leqslant\|x\|^2$, $|J_n|=1$, и все J_n становятся проекторами.

§ 3. Биортогональные системы. Пусть $\mathcal{E}$ сепарабельно и $\{h_n\}_1^\infty$ его базис. Тогда существует единственная полная сопряженная система $\{g_n\}_1^\infty$ с $(h_n, g_m)=\delta_{nm}$. Эти векторы определяют одномерные подпространства $\mathfrak{H}_n$, соответственно $\mathfrak{G}_n$. Из биортогональности $\{h_n\}_1^\infty$ и $\{g_n\}_1^\infty$ следует существование идемпотентных операторов $J_n=\mathfrak{H}_n\times\mathfrak{G}_n$, ортогональных попарно: $J_nJ_m=0$ $(n\neq m)$. Так как в разложении любого $x=\sum\limits_1^\infty c_nh_n$ по базису $\{h_n\}_1^\infty$ слагаемое c_nh_n как раз равно J_nx, то $\{J_n\}_1^\infty$ образуют идемпотентное разложение единицы.

Таким образом и на основании теоремы 6 получается теорема 8:

Теорема 8. *Для всякого базиса $\{h_n\}_1^\infty$ в сепарабельном гильбертовом пространстве сопряженная система $\{g_n\}_1^\infty$ будет также базисом. Соответствующие одномерные подпространства $\mathfrak{H}_n$, $\mathfrak{G}_n$ определяют идемпотентное разложение единицы $J_n=\mathfrak{H}_n\times\mathfrak{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$.*

Очевидно и утверждение противоположного характера: если две системы $\{h_n\}_1^\infty$ и $\{g_n\}_1^\infty$ указанным способом приводят к идемпотентному разложению единицы $\{J_n=\mathfrak{H}_n\times\mathfrak{G}_n\}_1^\infty$, то $\{h_n\}_1^\infty$ и $\{g_n\}_1^\infty$ суть базисы, „по существу" сопряженные, так как $(h_n, g_m)=0$ при $n\neq m$, но (h_n, g_n) остается, конечно, произвольным.

Теперь теорема 7 и ее доказательство указывают условия и общий способ спрямления $\{J_n\}_1^\infty$, зависящие лишь от взаимного расположения подпространств $\mathfrak{H}_n$, $\mathfrak{G}_n$ и не зависящие от частного выбора векторов h_n и g_n в этих подпространствах. Впрочем, можно показать, что оператор A теоремы 7 выражается через векторы h_n и g_n так: если $\{h_n, g_n\}_1^\infty$ биортогональна и h_n нормированы, то $Ah_n=g_n$. Отсюда следует, что спрямляемость $\{J_n\}_1^\infty$ равносильна возможности так выбрать h_n, g_n, чтобы базисы $\{h_n\}_1^\infty$ и $\{g_n\}_1^\infty$ стали риссовскими (по определению Н. К. Бари [3]).

Поступило
26 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948. [2] В. Я. Козлов, Матем. сборн., нов. сер., **26** (68), № 1 (1950). [3] Н. К. Бари, ДАН, **54**, № 5 (1946.)