Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

И. М. РАПОПОРТ

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 16 VI 1950)

Мы рассматриваем ниже дифференциальное уравнение

$$x''(t) + \lambda p(t)\, x(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x(T) = 0, \tag{2}$$

и для неотрицательных функций $p(t)$, суммируемых в интервале $(0, T)$ и удовлетворяющих условию нормирования $\frac{1}{T}\int\limits_0^T p(t)\,dt = 1$, устанавливаем неравенство: $\lambda_n(p) < \frac{4n^2}{T^2}$, которое, как мы показываем далее, не может быть улучшено. Мы доказываем также, что собственное число $\lambda_n(p)$ может принимать значения сколь угодно большие.

Пусть $x_n(t)$ — n-я собственная функция краевой задачи $t_0 = 0,\ t_1, \ldots, t_{n-1},\ t_n = T$ — ее нули. Предположим для определенности, что в данном интервале $t_k < t < t_{k+1}$ функция $x_n(t)$ положительна. Из уравнения (1) следует

$$x'_n(t_k) - x'_n(t_{k+1}) = \lambda_n \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(t)\, x_n(t)\, dt. \tag{3}$$

Так как в интервале (t_k, t_{k+1}) производная $x''_n(t)$ не принимает положительных значений,

$$x_n(t) < \frac{t_{k+1} - t_k}{[x'_n(t_k)]^{-1} - [x'_n(t_{k+1})]^{-1}} \text{ при } t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1} \tag{4}$$

Неравенство (4) может переходить в равенство лишь в том случае, если $\int\limits_{t_k}^{t} p(t)\,dt$ — кусочно-постоянная функция с одним разрывом внутри интервала (t_k, t_{k+1}). Из (3) и (4) следует:

$$\lambda_n \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(t)\,dt > \frac{1}{t_{k+1} - t_k}\,[x'_n(t_k) - x'_n(t_{k+1})]\,\{[x'_n(t_k)]^{-1} - [x'_n(t_{k+1})]^{-1}\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4}{t_{k+1} - t_k}, \tag{5}$$

так как наименьшее значение функции $u + \frac{1}{u}$ в интервале $0 < u < \infty$

равно 2. К тому же неравенству (5) мы придем и в том случае, если предположим, что функция $x_n(t)$ в интервале $t_k < t < t_{k+1}$ отрицательна.

Суммируя неравенства (4), соответствующие всем подинтервалам интервала $(0, T)$, найдем:

$$\lambda_n > \frac{4}{T}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2 - t_1} + \cdots + \frac{1}{T - t_{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{4}{T^2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2 - t_1} + \cdots + \frac{1}{T - t_{n-1}}\right)[t_1 + (t_2 - t_1) + \cdots + (T - t_{n-1})] =$$

$$= \frac{4}{T^2}\left(n + \frac{t_1}{t_2 - t_1} + \frac{t_2 - t_1}{t_1} + \cdots\right) \geqslant \frac{4}{T^2}[n + n(n-1)] = \frac{4n^2}{T^2}, \qquad (6)$$

что и требовалось доказать.

Полагая $p(t) = \frac{T}{2n\varepsilon}$ при $\frac{T}{n}(k - {}^1/_2) - \varepsilon < t < \frac{T}{n}(k - {}^1/_2) + \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $p(t) = 0$ в остальных подинтервалах интервала $(0, T)$, найдем, что при

$$\lambda = \frac{2n}{\varepsilon T}\varphi^2(\varepsilon), \quad \varphi \operatorname{tg}\varphi = \frac{2n\varepsilon}{T - 2n\varepsilon} \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right) \qquad (7)$$

дифференциальное уравнение (1) имеет решение:

$$x = (-1)^{k+1}\left(\frac{T}{2n} - \varepsilon\right)\sec\varphi\cos\left[\frac{T}{n}\left(k - \frac{1}{2}\right) - t\right]\frac{\varphi}{\varepsilon}$$

при $\frac{T}{n}\left(k - \frac{1}{2}\right) - \varepsilon < t < \frac{T}{n}\left(k - \frac{1}{2}\right) + \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

$$x = (-1)^k\left(t - \frac{Tk}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

в остальных подинтервалах интервала $(0, T)$. Это решение уравнения (1) непрерывно вместе с первой производной в интервале $(0, T)$, удовлетворяет условиям (2) и имеет $n-1$ нуль внутри интервала $(0, T)$. Следовательно, формула (7) определяет в этом случае n-е собственное число λ_n. Как видно из формулы (7), при достаточно малом ε λ_n будет сколь угодно близко к пределу $\frac{4n^2}{T^2}$.

Полагая $p(t) = 0$ при $0 < t < 2\varepsilon$; $p(t) = \frac{C}{(t - \varepsilon)^2}$ при $2\varepsilon < t < \frac{T}{2}$; $p(t) = \frac{16C}{T^2}\psi^2(\varepsilon)$ при $\frac{T}{2} < t < T$, где $C = \left[\frac{1}{\varepsilon T}\,\frac{T - 4\varepsilon}{T - 2\varepsilon} + \frac{8}{T^2}\psi^2(\varepsilon)\right]^{-1}$, $\frac{\operatorname{tg}\psi}{\psi} = -2 + \frac{4\varepsilon}{T}\left(\frac{\pi}{2} < \psi < \pi\right)$, найдем, что при

$$\lambda = \frac{1}{4\varepsilon T}\,\frac{T - 4\varepsilon}{T - 2\varepsilon} + \frac{2}{T^2}\psi^2(\varepsilon) \qquad (8)$$

уравнение (1) имеет решение:

$$x = \frac{t}{2\sqrt{\varepsilon}} \text{ при } 0 < t < 2\varepsilon; \qquad x = \sqrt{t - \varepsilon} \text{ при } 2\varepsilon < t < \frac{T}{2};$$

$$x = \sqrt{\frac{T}{2} - \varepsilon}\,\operatorname{cosec}\psi\sin 2\psi\left(1 - \frac{t}{T}\right) \text{ при } \frac{T}{2} < t < T,$$

непрерывное вместе с первой производной в интервале $(0, T)$, удовлетворяющее краевым условиям (2) и не имеющее нулей внутри интервала $(0, T)$. Следовательно, формула (8) определяет в этом случае первое собственное число λ_1. Как видно из формулы (8), при достаточно малом ε уже первое собственное число может принимать сколь угодно большие значения.

Поступило
6 VI 1950