Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. А. ЛУКОМСКАЯ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 14 VI 1950)

Рассмотрим систему уравнений эллиптического или гиперболического типа:

$$
\begin{aligned}
c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + e_1 \frac{\partial v}{\partial x} &= a_1 \frac{\partial u}{\partial y} + b_1 \frac{\partial v}{\partial y}, \\
c_2 \frac{\partial u}{\partial x} + e_2 \frac{\partial v}{\partial x} &= a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_2 \frac{\partial v}{\partial y},
\end{aligned} \tag{1}
$$

где a_i, b_i, c_i, e_i — функции от x и y, непрерывно дифференцируемые столько раз, сколько понадобится в дальнейшем,

$$
\frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial a_i}{\partial y}, \qquad \frac{\partial e_i}{\partial x} = \frac{\partial b_i}{\partial y} \tag{2}
$$

и

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_2 & e_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ a_2 & e_2 \end{vmatrix}^2
$$

не есть тождественный нуль [1].

Обозначим через Σ матрицу

$$
\Sigma = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & e_2 \end{Vmatrix}.
$$

Пусть u и v являются решением системы (1). Положим

$$
f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy
$$

и будем $f(z)$ также называть решением (1).

Назовем Σ-интегралом [2] от $f(z)$ и обозначим через $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, d_\Sigma z$ функцию:

$$
\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, d_\Sigma z = U(x, y) + iV(x, y) =
$$

$$
= \int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} (a_2 u + b_2 v)\, dx + (c_2 u + e_2 v)\, dy + i \int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} (a_1 u + b_1 v)\, dx + (c_1 u + e_1 v)\, dy
$$

(независимость интегралов в правой части от пути интегрирования с очевидностью вытекает из (1) и (2)).

Найдем необходимые и достаточные условия того, чтобы U, V также были решением системы (1). Для этого рассмотрим очевидные решения (1): $u=1$, $v=0$ и $u=0$, $v=1$; подставляя соответствующие значения U и V в (1), получим необходимые условия:

$$e_2 a_1 = b_2 c_1,$$
$$a_1(e_1 - c_2) = c_1(b_1 - a_2),$$
$$b_2(e_1 - c_2) = e_2(b_1 - a_2).$$

Легко проверить, что эти условия являются также и достаточными.

Определим функцию, которую будем называть Σ-производной от решения $f(z) = u + iv$ системы (1) и обозначать через $f_\Sigma^{(1)}(z)$, следующим образом.

Если определитель $a_1 b_2 - a_2 b_1$ в некоторой области Q не обращается в нуль, то положим в Q

$$f_\Sigma^{(1)}(z) = -\frac{b_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} - b_2 \dfrac{\partial v}{\partial x}}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + i\,\frac{a_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} - a_2 \dfrac{\partial v}{\partial x}}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Если $c_1 e_2 - c_2 e_1 \neq 0$ в Q, то положим

$$f_\Sigma^{(1)}(z) = -\frac{e_1 \dfrac{\partial u}{\partial y} - e_2 \dfrac{\partial v}{\partial y}}{c_1 e_2 - c_2 e_1} + i\,\frac{c_1 \dfrac{\partial u}{\partial y} - c_2 \dfrac{\partial v}{\partial y}}{c_1 e_2 - c_2 e_1}.$$

Наконец, если $a_1 e_2 - a_2 e_1 \neq 0$ в Q, то положим:

$$f_\Sigma^{(1)}(z) = -\frac{e_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} - b_2 \dfrac{\partial v}{\partial y}}{a_1 e_2 - a_2 e_1} + i\,\frac{c_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} - a_2 \dfrac{\partial v}{\partial y}}{a_1 e_2 - a_2 e_1}.$$

Если в Q два или все три определителя не равны нулю, то правые части этих формул равны.

Определим Σ-производную n-го порядка $f_\Sigma^{(n)}(z)$ как Σ-производную от $f_\Sigma^{(n-1)}(z)$.

При помощи довольно громоздких вычислений устанавливается, что Σ-производная от решения (1) есть также решение (1).

Σ-дифференцирование и Σ-интегрирование являются взаимно-обратными операциями.

Функцию $f(z)$ имеющую в точке z_0 и в некоторой окрестности этой точки Σ-производную, будем называть Σ-моногенной в этой точке.

Если коэффициенты a_i, b_i, c_i, e_i аналитические и если ограничиться отысканием аналитических решений $u(x, y)$ и $v(x, y)$, то на Σ-моногенные функции обобщается ряд теорем о степенных рядах, где роль степенных функций играют функции $aZ^{(n)}(z_0, z)$, определяемые формулами:

$$aZ^{(0)}(z_0, z) = a,$$
$$aZ^{(n)}(z_0, z) = n\int_{z_0}^{z} aZ^{(n-1)}(z_0, z)\, d_\Sigma z.$$

Здесь a — комплексная постоянная.

Имеют место следующие предложения:

1. Равномерно сходящийся ряд Σ-моногенных функций есть Σ-моногенная функция.

2. Если $f(z)$ Σ-моногенна в точке z_0, то существует постоянная C такая что,

$$|f_{\Sigma}^{(n)}(z_0)| < n!\, C^n.$$

3. Если степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ имеет отличный от нуля радиус сходимости, то существует такая окрестность точки z_0, что в ней ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n Z^{(n)}(z_0, z),$$

а также ряды, полученные из него почленным Σ-дифференцированием и Σ-интегрированием, сходятся равномерно и абсолютно.

4. Если $f(z)$ Σ-моногенна в точке z_0 и $f_{\Sigma}^{(n)}(z_0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то $f(z) \equiv 0$.

5. Функция, Σ-моногенная в точке z_0, может быть единственным образом разложена в Σ-степенной ряд.

Эти обобщения сделаны Л. Берсом и А. Гельбартом для систем вида:

$$\tau_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_1(y) \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\tau_2(x) \frac{\partial v}{\partial x} = -\sigma_2(y) \frac{\partial u}{\partial y},$$

где τ_i, σ_i — аналитические функции.

Полученные результаты применим к уравнениям плоской задачи теории пластичности, написанным в форме М. Леви [3]:

$$\cos\eta \frac{\partial x}{\partial \xi} - \sin\eta \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$\sin\eta \frac{\partial x}{\partial \xi} + \cos\eta \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\partial x}{\partial \eta},$$

где ξ и η связаны с напряжениями формулами

$$\sigma_x = K(\xi - \cos\eta), \quad \sigma_y = K(\xi + \cos\eta), \quad \tau = K\sin\eta.$$

Все аналитические решения системы имеют представление в виде Σ-степенного ряда, где все $a_n Z^{(n)}(z_0, z)$ вычисляются в конечном виде, так как подинтегральные функции в соответствующих интегралах являются полиномами относительно ξ, $\sin\eta$, $\cos\eta$.

Каждый Σ-полином дает в параметрической форме через параметры ξ и η некоторое решение уравнений пластичности.

Σ-линейная функция

$$\frac{1}{A} Z^{(1)}(0, z) + \frac{B-1}{A}$$

дает известное решение Надаи [4]

$$\sigma_x = K(B - Ax \pm 2\sqrt{1 - A^2 y^2}), \quad \sigma_y = K(B - Ax), \quad \tau = KA_y;$$

полином второй степени

$$\frac{A}{2} Z^{(2)} - AZ^{(1)} + B + iC$$

дает новое решение

$$x = \frac{A\xi^2}{2} + A\xi \cos \eta + B,$$

$$y = -A\xi \sin \eta - A\eta + C,$$

$$\sigma_x = K(\xi - \cos \eta), \quad \sigma_y = K(\xi + \cos \eta), \quad \tau = K \sin \eta.$$

Поступило
8 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Усп. матем. наук, 1, в. 3—4 (13—14) (1946). [2] Lipman Bers and Abe Gelbart, Trans. Am. Math. Soc., 56, № 1 (1944). [3] М. Леви, Теория пластичности, Сборн. статей, 1948. [4] В. В. Соколовский, Теория пластичности, изд. АН СССР, 1946.