Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

В. М. ВОЛОСОВ

К ВОПРОСУ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 VI 1950)

В различных приложениях часто встречаются дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной. Общий вид такого уравнения

$$\mu y^{(n)} + f(x, y^{(k)}, y) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1), \quad \mu \geqslant 0.$$

Если положить $\mu = 0$, то получится уравнение $f = 0$. Естественно поставить вопрос, как связано решение полного уравнения $\mu y^{(n)} + f = 0$ с решением вырожденного уравнения $f = 0$ при малых значениях параметра μ.

Тот случай, когда $y^{(n-1)}$ явно входит в уравнение, был исследован А. Н. Тихоновым [1].

В этом случае при определенных условиях, наложенных на решение вырожденного уравнения $f = 0$, наблюдается предельный переход от решения невырожденного уравнения к решению вырожденного уравнения при $\mu \to 0$.

Если $y^{(n-1)}$ явно в уравнение не входит, то, как показывают простейшие примеры, такого предельного перехода, вообще говоря, не будет. Возьмем, например, уравнение $\mu y'' + y = 0$. Вырожденное уравнение имеет решение $y = 0$. Решение невырожденного уравнения есть $y = y_0 \cos \frac{x}{\sqrt{\mu}} + \sqrt{\mu}\, y_0' \sin \frac{x}{\sqrt{\mu}}$, где y_0, y_0' — начальные значения y и y' в точке $x = x_0 = 0$. При $\mu \to 0$ это решение колеблется с увеличивающейся частотой около $y = 0$, однако, если $y_0 \neq 0$, предельного перехода нет — положительные и отрицательные экстремумы стремятся к $|y_0|$ и $-|y_0|$, а не к $y = 0$.

В других случаях решение уходит в сторону от решения вырожденного уравнения, как это наблюдается, например, для уравнения $\mu y'' - y = 0$, решение которого $y = \frac{y_0 + \sqrt{\mu}\, y_0'}{2} e^{x/\sqrt{\mu}} + \frac{y_0 - \sqrt{\mu}\, y_0'}{2} e^{-x/\sqrt{\mu}}$ стремится к бесконечности при $\mu \to 0$.

Таким образом, для уравнений подобного типа естественно искать условия, при которых будут наблюдаться устойчивые колебания около решения вырожденного уравнения при $\mu \to 0$.

По предложению А. Н. Тихонова нами было исследовано нелинейное уравнение второго порядка.

В качестве примера, хорошо иллюстрирующего некоторые особенности этой задачи, рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$\mu y'' + Q(x)\,y = 0.$$

Пусть $0 < m \leqslant Q \leqslant M < \infty$, где m и M — константы на некотором отрезке $x \in [x_0, \bar{x}]$. По теореме сравнения решение этого уравнения будет колеблющимся, причем, расстояние между соседними нулями $\geqslant \pi\sqrt{\mu}/\sqrt{M}$ и $\leqslant \pi\sqrt{\mu}/\sqrt{m}$. Пусть функция $Q(x)$ имеет непрерывную вторую производную. Сделаем замену $\tau = \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{Q(x)}{\mu}}\,dx$, $y = Q(x)^{-1/4}u(\tau)$.

Для $u(\tau)$ получается уравнение

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + [1 + \rho(\mu, \tau)]\,u = 0.$$

Мы не выписываем выражение для $\rho(\mu, \tau)$. Оказывается, что при $\mu \to 0$ $\rho(\mu, \tau)$ есть величина порядка μ. Производя оценку, получаем, что $u(\tau) = c_1 \cos\tau + c_2 \sin\tau + \psi(\mu, x)$, где $\psi(\mu, x)$ — функция, равномерно относительно x стремящаяся к нулю при $\mu \to 0$ $(x \in [x_0, \bar{x}])$.

Переходя к прежним переменным и учитывая начальные условия, получаем

$$y(x) = y_0 \sqrt[4]{\frac{Q(x_0)}{Q(x)}} \cos\left(\int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{Q(x)}{\mu}}\,dx + \varphi_0\right) + O(\sqrt{\mu});$$

φ_0 — некоторая фаза, определяющаяся из начальных условий; y_0 — значение y в начальной точке $x = x_0$.

Таким образом, положительные и отрицательные экстремумы решения при $\mu \to 0$ приближаются к кривым $F_1(x) = |y_0| \sqrt[4]{Q(x_0)/Q(x)}$ и $F_2(x) = -|y_0| \sqrt[4]{Q(x_0)/Q(x)}$. Эти кривые назовем опорными кривыми.

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение второго порядка вида:

$$\mu y'' + Q(x, y) = 0.$$

Будем считать, что вырожденное уравнение $Q(x, y) = 0$ имеет решение $y = 0$.

Оказывается, что при определенных условиях, наложенных на функцию $Q(x, y)$, решение уравнения $\mu y'' + Q(x, y) = 0$ будет устойчиво колебаться около вырожденного решения $y = 0$, причем будут существовать опорные кривые $F_1(x)$ и $F_2(x)$ для положительных и отрицательных экстремумов.

Пусть функция $Q(x, y)$ определена в области $x \in [x_0, \bar{x}]$, $|y| \leqslant \infty$ и имеет в этой области непрерывные и ограниченные производные Q'_x, Q'_y, Q''_{xx}, Q''_{yy}, Q''_{xy}. Пусть, кроме того, в указанной области выполнены условия: 1) $Q(x, y) \gtreqqless 0$ при $y \gtreqqless 0$; 2) $m|y| \leqslant |Q(x, y)| \leqslant M|y|$, где m и M — некоторые константы > 0; 3) $Q(x, y)/y$ — непрерывная функция в окрестности прямой $y = 0$.

Качественную картину поведения решения дает теорема 1.

Теорема 1. *Если функция $Q(x, y)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то для произвольного числа $\varepsilon_0 > 0$ существует такое число $\mu_0 > 0$, что при $\mu < \mu_0$ решение уравнения $\mu y'' + Q(x, y) = 0$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ колеблется около прямой $y = 0$ так, что расстояние между соседними нулями $\geqslant \pi\sqrt{\mu}/\sqrt{M}$ и $\leqslant \pi\sqrt{\mu}/\sqrt{m}$ и, кроме того, существуют гладкие опорные кривые $F_1(x)$ и $F_2(x)$ такие, что*

$$\{|F_1(x_n) - u_n| + |F_2(p_n) - v_n|\} < \varepsilon_0,$$

где u_n и v_n — величины n-х положительных и отрицательных экстремумов, а x_n и p_n — точки, в которых эти экстремумы достигаются.

Опорные кривые F_1 и F_2 удовлетворяют системе уравнений

$$F_i' = \psi_i(x, F_k), \quad i, k = 1, 2, \tag{1}$$

где функции ψ_i имеют вид:

$$\psi_i(x, F_1, F_2) =$$

$$= \frac{1}{Q(x, F_i)} \left\{ \frac{\sum\limits_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} \int\limits_0^{F_r} Q'_x(x, t)\, dt \int\limits_t^{F_r} \left(\int\limits_z^{F_r} Q(x, \tau)\, d\tau \right)^{-1/2} dz}{2 \sum\limits_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} \int\limits_0^{F_r} \left(\int\limits_z^{F_r} Q(x, \tau)\, d\tau \right)^{-1/2} dz} - \int\limits_0^{F_r} Q'_x(x, t)\, dt \right\},$$

$$i = 1, 2. \tag{2}$$

Начальные значения $F_1(x_0)$ и $F_2(x_0)$ определяются из условий:

$$\int\limits_0^{(-1)^{i+1} F_i(x_0)} |Q[x_0, (-1)^{i+1} t]|\, dt = \int\limits_0^{|y_0|} |Q(x_0, t \operatorname{sign} y_0)|\, dt, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Гладкие функции F_1 и F_2, удовлетворяющие системе (1) *и условиям* (3), *существуют и единственны.*

Если функция $Q(x, y)$ определена в ограниченной области $x \in [x_0, \bar{x}]$, $|y| < y_1$ и в этой области выполняются указанные ранее условия, то теорема 1 остается справедливой, но в этом случае нельзя выбирать начальную точку (x_0, y_0), произвольно близко к границе области определения функции $Q(x, y)$, так как опорные кривые могут на участке $x \in [x_0, \bar{x}]$ выйти из этой области, пересекая прямые $y = \pm y_1$. Однако достаточно подчинить y_0 условию

$$|y_0| \sqrt{\frac{M}{m}} \exp\left[2(\bar{x} - x_0)\, m^{-3/2} M^{1/2} \sup\left|\frac{Q'_x}{y}\right|\right] + \delta \leqslant y_1,$$

где δ — произвольное число > 0, чтобы опорные кривые не вышли из указанной области.

Опорные кривые позволяют весьма полно судить о поведении решения при $\mu \to 0$. Так например, с помощью опорных кривых можно вычислить предельные значения интегралов, в которые входит решение уравнения $\mu y'' + Q(x, y) = 0$.

Теорема 2. *Если функция $\varphi(x, y)$ непрерывна и имеет ограниченную производную φ'_x, то*

$$\lim_{\mu\to 0}\int_a^b \varphi[x, y(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b dx \left\{ \frac{\sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} \int_0^{F_r(x)} \left(\int_z^{F_r(x)} Q(x,\tau)\,d\tau \right)^{-1/2} \varphi(x,z)\,dz}{\sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} \int_0^{F_r(x)} \left(\int_z^{F_r(x)} Q(x,\tau)\,d\tau \right)^{-1/2} dz} \right\}, \quad a, b \in [x_0, \bar{x}]. \quad (4)$$

В заключение заметим, что если $Q(x, y)$ нечетная по y функция, то из формул (1), (2), (3) следует, что $F_1 = -F_2$.

Если, кроме того, $\varphi(x, y)$ тоже нечетная по y функция, то

$\lim\limits_{\mu\to 0}\int_a^b \varphi[x, y(x)]\,dx = 0$, что следует из формулы (4).

Поступило
15 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Тихонов, Матем. сборн., **22** (64):2 (1948).