Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Л. КЛЯЧКИН

ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ С ПОДОГРЕВОМ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 25 V 1950)

1. Интеграл уравнения движения газа. Рассмотрим одноразмерное движение газа в цилиндрической трубе с подогревом при наличии трения. Будем полагать, что: 1) источники тепла распределены вдоль трубы по линейному закону, т. е. $Q_B = qx$, где q (кал / кгм) = const; 2) коэффициент трения $\lambda = \text{const}$ и не зависит* от критериев M и Re.

Напишем дифференциальное уравнение движения газа с подогревом при наличии трения в виде

$$(w^2 - a^2)\frac{dw}{w} = -gk\,dL_r - g\,\frac{k-1}{A}\,dQ_B, \tag{1}$$

где $dL_r = \lambda\,\frac{w^2}{2g}\,\frac{dx}{D}$, $dQ_B = q\,dx$, $a^2 = kgRT$.

Уравнение (1) представим как

$$(w^2 - a^2)\frac{dw}{dx} = -\frac{k\lambda}{2D}\,w^3 - \frac{k-1}{A}\,gqw. \tag{1'}$$

Приведем уравнение энергии

$$Q_B = qx = c_p(T - T_1) + \frac{A}{2g}(w^2 - w_1^2) \tag{2}$$

к виду

$$a^2 = a_1^2\left(1 + \frac{k-1}{2}\,M_1^2\right) + \frac{k-1}{A}\,gqx - \frac{k-1}{2}\,w^2. \tag{2'}$$

Введя обозначения $b = \frac{k\lambda}{2D}$, $c = \frac{k-1}{A}\,gq$, $d = a_1^2\left(1 + \frac{k-1}{2}\,M_1^2\right)$,

---

* Допущение постоянства λ в широком диапазоне чисел Re достаточно справедливо для течения без подогрева [3] при больших значениях чисел Re ($> 10^5$) как для гладких, так и для шероховатых труб.

Действительно, из формулы Никурадзе $\lambda = 0{,}0032 + 0{,}221 / \text{Re}^{0{,}237}$ следует, что при увеличении Re от 10^6 до 10^7, т. е. в 10 раз, λ уменьшается только на 30%. Воздействие же подогрева на λ еще недостаточно изучено.

Что же касается влияния M на λ, то многочисленные исследования (Гухмана и Илюхина, Варшавского, Лельчука, Новикова, Фресселя и др.) показали независимость λ от M вплоть до скорости звука.

исключим a^2 из (1′) посредством (2′); тогда получим:

$$\left(\frac{k+1}{2} w^2 - d - cx\right)\frac{dw}{dx} = -bw^3 - cw, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{dx}{dw} - \frac{c}{bw^3 + cw}\, x = -\frac{\frac{k+1}{2} w^2 - d}{bw^3 + cw}. \tag{4}$$

Решая дифференциальное уравнение (4) как линейное (относительно x и x'), находим

$$x = \frac{w}{\sqrt{bw^2 + c}}\left[\frac{k+1}{2\sqrt{b}} \ln \frac{w_1 + \sqrt{w_1^2 + c/b}}{w + \sqrt{w^2 + c/b}} + \right.$$
$$\left. + \frac{d\sqrt{b}}{c}\left(\frac{\sqrt{w_1^2 + c/b}}{w_1} - \frac{\sqrt{w^2 + c/b}}{w}\right)\right]. \tag{5}$$

Для определения зависимости $M = f(w)$ воспользуемся выражением (2), откуда найдем

$$w^2\left(\frac{1}{M^2} + \frac{k+1}{2}\right) - d = cx.$$

Тогда после преобразования найдем:

$$\frac{1}{M^2} + \frac{k-1}{2} = \frac{\frac{k+1}{2} c}{bw\sqrt{w^2 + c/b}} \ln \frac{w_1 + \sqrt{w_1^2 + c/b}}{w + \sqrt{w^2 + c/b}} + \frac{d}{ww_1} \frac{\sqrt{w_1^2 + c/b}}{\sqrt{w^2 + c/b}}. \tag{6}$$

Уравнение (6) дает возможность определить функцию $w = f(M)$ для известных параметров газа на входе в трубу и заданной величины c/b.

Критериальный параметр $\frac{c}{b} = \frac{k-1}{k} \frac{2g}{A} \frac{qD}{\lambda} = \frac{k-1}{k} \frac{dQ_B}{dQ_r} \frac{w^2}{2g}$ характеризует отношение извне подведенного тепла к теплу трения; чем больше c/b, тем относительно больше количество извне подведенного тепла. Чем меньше c/b, тем больше роль трения в процессе. Значению $c/b = \infty$ соответствует течение с подогревом без трения. Значению $c/b = 0$ соответствует течение с трением, но без подогрева.

Определение функций $T(M)$; $p(M)$; $Q_B(M)$; $\lambda \frac{x}{D}(M)$ производится по формулам

$$\frac{T}{T_1} = \frac{(w/w_1)^2}{(M/M_1)^2}; \tag{7}$$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{w/w_1}{(M/M_1)^2}; \tag{8}$$

$$\lambda \frac{x}{D} = \frac{2}{k} \frac{\left[w^2\left(\frac{1}{M^2} + \frac{k-1}{2}\right) - d\right]}{c/b}; \tag{9}$$

$$Q_B = \frac{A}{(k-1)g}\left[w^2\left(\frac{}{} + \frac{k-1}{2}\right) - d\right]. \tag{10}$$

2. Анализ движения газа в цилиндрической трубе с подогревом при наличии трения. Формулы (6)—(10) дают возможность построить графики функций $\frac{P_2}{P_1}(M)$; $\frac{T_2}{T_1}(M)$; $\frac{Q}{c_p T_1}(M)$ и $\lambda\frac{x}{D}$ для заданных значений $\frac{c}{b}$.

Падение давления (рис. 1). Наличие трения при течении с подогревом увеличивает падение давления. С уменьшением параметра c/b падение давления становится более интенсивным и достигает максимального значения при $c/b=0$. Влияние трения на падение давления сказывается более интенсивно в области больших M.

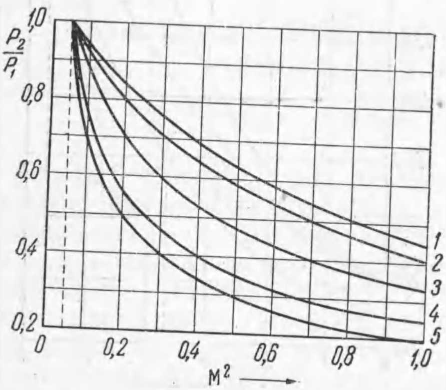

Рис. 1. Влияние M на падение давления газа в цилиндрической трубе. $M_1^2=0{,}05$, $T=400°$ К. *1* — $c/b=\infty$, *2* — $c/b=10^6$, *3* — $c/b=10^5$, *4* — $c/b=10^4$, *5* — $c/b=0$

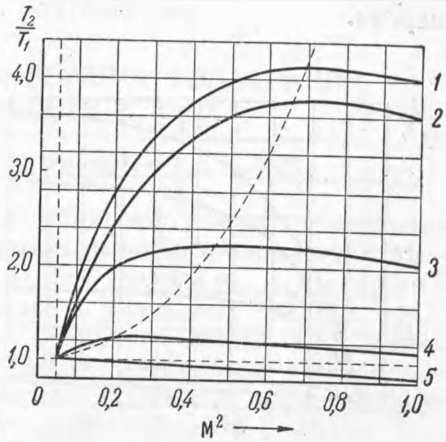

Рис. 2. Влияние M на нагрев газа в цилиндрической трубе. $M_1^2=0{,}05$, $T_1=400°$ К. Обозначение кривых, как на рис. 1

Нагрев газа (рис. 2). При разгоне потока в заданном интервале чисел M наличие трения уменьшает нагрев газа и смещает максимальную температуру газа в область более низких значений $M\,(<1/\sqrt{k})$. При нагреве же газа в заданном интервале температур наличие трения увеличивает конечное значение числа M.

Разгон потока. В заданном интервале чисел M наличие трения уменьшает отношение w_2/w_1, причем влияние трения сказывается относительно сильнее при больших M.

Количество подведенного тепла (рис. 3). Наличие трения уменьшает количество тепла, потребного для достижения предельного состояния ($M=1$).

Предельная длина трубы. С уменьшением c/b предельное значение $\lambda x/D$ (соответствующее $M_2=1$) возрастает и достигает максимального значения при $c/b=0$.

3. Особенности предельного состояния газа при движении в цилиндрической трубе с подогревом и трением. На рис. 4 нанесены в координатах $T-S$ кривые течения газа для различных значений c/b и $M_1^2=\text{idem}$, а также линии* $M=\text{const}$.

Из дифференциального уравнения (1′) следует, что при $M=1$ для любых значений λ и $q>0$ имеет место предельное состояние

* Уравнение линий $M=\text{const}$ в цилиндрической трубе $\Delta S_M=\frac{k+1}{2(k-1)}AR\ln\frac{T}{T_1}$.

течения, так как $dw/dx = \infty$, $dv/dx = \infty$, $dp/dx = \infty$, $d\mathrm{M}/dx = \infty$, $dQ_B/d\mathrm{M} = 0$.

При этом „локальный“ показатель политропы $n = k$, что следует из ([2]) $n = 1 + (k-1)\,\mathrm{M}^2 - \frac{k-1}{k}\,\frac{q}{Ap\,dv/dx}$.

Следовательно, процесс течения в предельном состоянии происходит изоэнтропно, по обратимой адиабате ([1]); это означает, что тепло трения полностью (обратимо) возвращается газу и идет на увеличение его кинетической энергии.

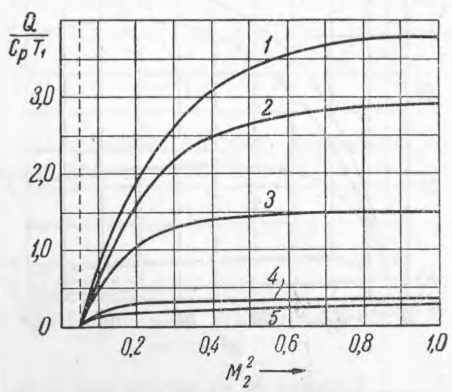

Рис. 3. Влияние M на количество подведенного тепла при движении газа в цилиндрической трубе. $M_1^2 = 0{,}05$, $T_1 = 400°$ К. Обозначения кривых, как на рис. 1

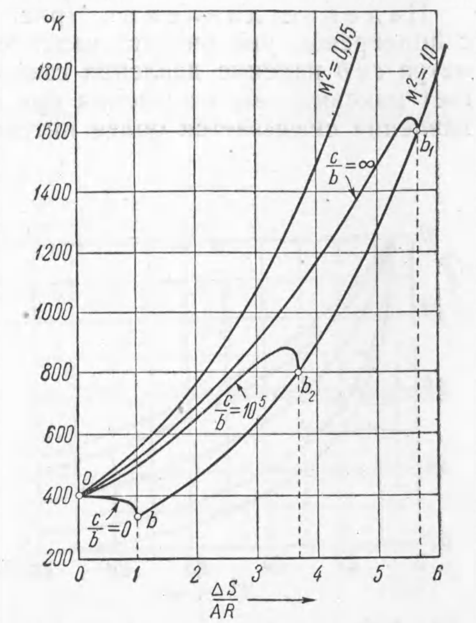

Рис. 4. Процесс течения газа в цилиндрической трубе в координатах $T - S$

Поступило
25 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Новиков, ЖТФ, № 6 (1949). [2] И. И. Новиков, ЖТФ, № 6 (1949). [3] С. А. Христианович, Прикладная газовая динамика, 1948. [4] А. А. Гухман и А. В. Илюхин, Теплообмен при движении газов в трубах с большой скоростью, ЦКТИ, кн. 12; Теплопередача и аэродинамика, 1949.