Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

И. С. АРЖАНЫХ

ВИХРЕВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 31 V 1950)

Теория функций комплексного переменного является мощным алгорифмом при изучении плоских потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости. Вполне естественно возникает вопрос: существует ли класс трехмерных течений, которые можно исследовать с помощью теории функций комплексного переменного?

Легко показать ([1]), *что потенциальное движение голономной системы в конфигурационном пространстве есть проекция вихревого из пространства с числом измерений на единицу выше, чем собственное пространство системы.*

В применении к гидродинамике эта теорема позволяет построить широкий класс вихревых течений в трехмерном пространстве, определяемых функцией комплексного переменного. Тем самым теория функций комплексного переменного приобретает вихревую интерпретацию.

Теорема 1. *Аналитической функции* $F(\zeta; t) = \varphi(x, y; t) + i\psi(x, y; t)$ *комплексного переменного* $\zeta = x + iy$, *зависящей от времени* t *как от параметра, соответствует класс трехмерных вихревых течений идеальной несжимаемой однородной жидкости под действием потенциальных сил. Если* $f(x, y; t) = a$, $g(x, y; t) = b$ — *интегралы системы дифференциальных уравнений* $\dot{x} = \partial\varphi / \partial x$, $\dot{y} = \partial\varphi / \partial y$, *то поле скоростей соответствующего класса течений будет:*

$$v_x = \partial\varphi / \partial x, \quad v_y = \partial\varphi / \partial y, \quad v_z = \chi(t) + h(f, g), \tag{1}$$

а поле вихрей

$$\Omega_x = \frac{\partial h}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \Omega_y = -\frac{\partial h}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \Omega_z = 0. \tag{2}$$

Давление определяется формулой

$$p = c(t) - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho U - \rho\left(\frac{1}{2}\left|\frac{dF}{d\zeta}\right|^2 + z\frac{dx}{dt}\right), \tag{3}$$

а поверхности, по которым движутся частицы жидкости суть:

1) *крылья*

$$f(x, y; t) = a, \quad g(x, y; t) = b; \tag{4}$$

2) *фюзеляж*

$$z = \int \chi(t)\,dt + th(f, g) + q(f, g), \tag{5}$$

где $\chi(t)$, $c(t)$, $h(f, g)$, $q(f, g)$ — *произвольные функции.*

Доказательство. Дифференциальные уравнения, которыми определяется движение рассматриваемой жидкости, имеют следующий вид:

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = v_z; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \Omega_y v_z - \Omega_z v_y = \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \Omega_z v_x - \Omega_x v_z = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad H = U - \frac{1}{\rho} p - \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \Omega_x v_y - \Omega_y v_x = \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Уравнение неразрывности тождественно удовлетворяется, если поле скоростей имеет структуру (1). Уравнения Громеко — Лемба запишутся в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} v_z^2\right) = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} v_z^2\right) = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial z}. \tag{*}$$

Первые два из них тождественно удовлетворяются, если давление определить формулой (3). Третье уравнение обращается в следующее:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial h}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial H}{\partial z},$$

или $\dot{\chi} = \partial H / \partial z$.

Вычислим H:

$$H = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\chi + h)^2 + z\frac{d\chi}{dt} - \frac{1}{\rho} c.$$

Отсюда находим, что $\partial H / \partial z = \dot{\chi}$, т. е. последнее уравнение системы ($*$) также удовлетворяется. Остается рассмотреть закон движения жидких частиц. Совершенно ясно, что уравнения (4) определяют цилиндрические поверхности, по которым движутся частицы. Вычислим v_z, имея в виду жидкую поверхность (5):

$$\frac{dz}{dt} = \chi + h + t\frac{dh}{dt} = \chi + h = v_z.$$

Теперь наша теорема доказана в полном объеме.

Для установившихся течений применение теории функций комплексного переменного значительно упрощается.

Теорема 2. *Аналитической функции комплексного переменного $F(\zeta) = \varphi + i\psi$ соответствует класс трехмерных установившихся течений идеальной несжимаемой однородной жидкости:*

$$v_x - iv_y = dF / d\zeta, \quad v_z = \theta(\psi) \tag{6}$$

(θ — *произвольная функция*). *Течение* (6) *всюду вихревое*:

$$\Omega_x - i\Omega_y = \frac{dF}{d\zeta}\frac{d\theta}{d\psi}, \quad \Omega_z = 0. \tag{7}$$

Давление определяется формулой:

$$p = c + \rho U - \frac{1}{2}\rho |dF / d\zeta|^2. \tag{8}$$

Поверхности тока состоят из двух семейств:

1) *крыло:*

$$\psi(x, y) = a;$$

2) *фюзеляж:*

$$z = \theta(\psi) \int \{|d\zeta / dF|^2 dF\}_{\psi=a} + \omega(\psi). \qquad (9)$$

Доказательство проводится точно так же, как и в общем случае. Итак, каждому плоскому потенциальному течению ставится в соответствие трехмерное с плоским вихрем.

Рассмотрим, например, функцию $F = \frac{m}{2\pi} \ln \zeta$, соответствующую источнику в плоском движении. Здесь крыло можно взять в виде плоскости zx, а фюзеляж — в виде параболоида вращения. Линии тока определяются пересечением плоскостей, проходящих через ось z, с параболоидом. Проекцией течения на плоскость xy является известное потенциальное плоское течение вблизи источника. На рис. 1 дана фотография модели поверхностей тока для этой функции.

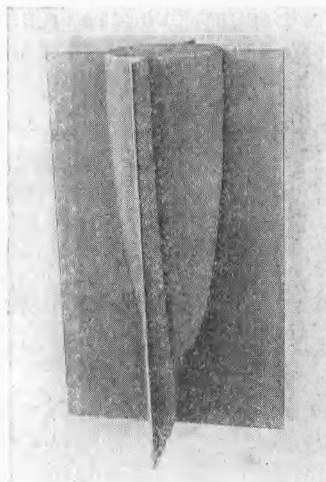

Рис. 1

В качестве второго примера рассмотрим функцию $F = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta$. Здесь крыльями будут круговые цилиндры с осью z, а фюзеляжем, в частности, геликоид. Проекцией течения на плоскость xy является известное плоское течение вблизи точечного вихря. На рис. 2 дана фотография модели поверхностей тока для этой функции

Каждой функции комплексного переменного соответствует вполне определенное крыло. Фюзеляжи данного крыла образуют некоторое множество. Представляет интерес вопрос о характеристическом свойстве фюзеляжей данного крыла.

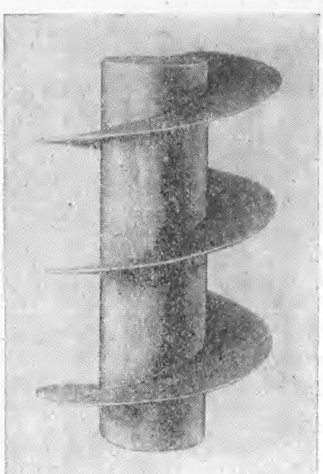

Рис. 2

Теорема 3. *Для того чтобы поверхность $z = V(x, y) + c$ можно было рассматривать как фюзеляж при данном крыле $\psi(x, y) = a$, необходимо и достаточно, чтобы функция V удовлетворяла следующему уравнению:*

$$\frac{D}{D(x, y)} \left\{ \frac{D(V, \psi)}{D(x, y)},\ \psi \right\} = 0. \qquad (10)$$

Необходимость. Из уравнения фюзеляжей имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \theta(\psi).$$

Исключая функцию θ, приходим к уравнению (10).

Достаточность. Пусть условие (10) выполнено. Тогда будем иметь:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}=\theta(\psi).$$

Поверхности тока определяются интегралами системы

$$dx:dy:dz=\frac{\partial \psi}{\partial y}:-\frac{\partial \psi}{\partial x}:\theta(\psi),$$

из которой находим

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dz}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dz}=1,$$

т. е. $z=V+c$ — уравнение фюзеляжа.

В силу свойств функций комплексного переменного можно утверждать, что любой цилиндр (с осью z) с простой замкнутой образующей можно рассматривать как некоторое крыло, которому соответствует семейство фюзеляжей.

В самом деле, любой такой цилиндр можно получить из кругового с помощью конформного отображения. Семейство фюзеляжей кругового цилиндра при этом преобразовании перейдет в новое, соответствующее возникающему крылу. Естественно поставить вопрос о характеристике всех возможных фюзеляжей.

Теорема 4. *Множество всех фюзеляжей, представимых в параметрическом виде:*

$$x=\alpha+\partial W/\partial\beta,\quad y=\beta-\partial W/\partial\alpha,\quad z=\alpha-\partial W/\partial\beta, \tag{11}$$

обладает тем свойством, что функция $W(\alpha,\beta)$ *удовлетворяет следующему уравнению в частных производных четвертого порядка:*

$$D(\Sigma,\sigma)/D(\alpha,\beta)=0, \tag{12}$$

где $\sigma=\beta+\partial W/\partial\alpha$, $\Sigma=A/B$,

$$A=\frac{2}{\Delta}\left[\left(1-\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial\beta^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\Delta}\left(1+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}\right)^2+\frac{1}{\Delta^2}\left(1+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2\right],$$

$$B=1+\frac{4}{\Delta^2}\left[\left(1+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2-\Delta\left(1+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}\right)^2\right],$$

$$\Delta=1+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2.$$

Действительно, для получения всех фюзеляжей необходимо исключить функцию ψ из уравнения (10) и уравнения Лапласа $\nabla^2\psi=0$.

Среднеазиатский
государственный университет

Поступило
23 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Аржаных, Изв. АН Узб.ССР, № 3 (1949).