Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. П. ТОЛСТОВ

ИНТЕГРАЛ КАК ПРИМИТИВНАЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 VI 1950)

Цель настоящей заметки показать, что в одномерном случае с помощью надлежаще выбранной замены переменного интеграл Лебега и узкий интеграл Данжуа можно преобразовать в интеграл от точной всюду конечной производной. Иногда интеграл Лебега можно преобразовать в интеграл от непрерывной функции.

Теорема 1. *Если $f(x)$ конечна и суммируема для $a \leqslant x \leqslant b$, а множество ее точек разрыва замкнуто и имеет нулевую меру, то существует монотонная функция $x = \varphi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, с непрерывной производной, причем*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \tag{1}$$

где $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ — непрерывная для $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ функция.

Доказательство вытекает из следующего:

1. Положим для $a \leqslant x \leqslant b$

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx. \tag{2}$$

Тогда $F'(x)$ непрерывна и совпадает с $f(x)$ вне некоторого замкнутого множества E меры нуль. Кривая $y = F(x)$ спрямляема. Пусть s — длина этой кривой, отсчитываемая от точки, соответствующей $x = a$. Функция

$$s = s(x) = \int\limits_a^x \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \tag{3}$$

абсолютно непрерывна. Следовательно, для замкнутого множества значений s $\mathscr{E} = s(E)$ имеем $\operatorname{mes} \mathscr{E} = 0$. Вне $\mathscr{E}$, очевидно, dx/ds и dy/ds существуют и непрерывны, а на $\mathscr{E}$ $|\Delta x/\Delta s| \leqslant 1$ и $|\Delta y/\Delta s| \leqslant 1$.

2. Существует возрастающая функция $s = s(t)$ с непрерывной производной, определенная на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ оси Ot, отображающая этот отрезок на отрезок $[0, l]$ оси Os (l — длина кривой $y = F(x)$), причем на множестве $T = s^{-1}(\mathscr{E})$ выполняется условие $s'(t) = 0$.

3. Функции $x = x(s(t)) = \varphi(t)$, $y = y(s(t)) = F(\varphi(t))$ обладают для $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ непрерывными производными, причем всюду

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t), \tag{4}$$

откуда и следует теорема 1.

Теорема 2. *Если $f(x)$ конечна и суммируема для $a \leqslant x \leqslant b$, то существует всюду дифференцируемая монотонная функция $x = \varphi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ с ограниченной производной, причем имеет место формула* (1), *где $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ — точная ограниченная производная.*

Доказательство вытекает из следующего:

1. Рассматриваем опять функцию $F(x)$ (см. (2)). Кривая $y = F(x)$ спрямляема и длина дуги выражается с помощью соотношения (3). $x = x(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, — монотонная функция. Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^l f(x(s))\,x'(s)\,ds. \tag{5}$$

Почти для всех s

$$\frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds}F(x(s)) = f(x(s))\ \frac{dx}{ds}.$$

Множество значений s, для которых это равенство по той или иной причине не выполнено, обозначим через $\mathscr{E}$, $\operatorname{mes}\mathscr{E} = 0$.

2. Существует всюду дифференцируемая возрастающая функция $s = s(t)$ с ограниченной производной, определенная на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ оси Ot, отображающая этот отрезок на отрезок $[0, l]$ оси Os, причем на множестве $T = s^{-1}(\mathscr{E})$ выполнено условие $s'(t) = 0$. Существование такой функции вытекает из следующей доказанной нами в ([1]) леммы:

Пусть $\operatorname{mes}\mathscr{E} = 0$, $\mathscr{E} \subset [0, l]$. *Существует абсолютно непрерывная и неубывающая функция $t = t(s)$, всюду обладающая конечной или бесконечной производной, причем на $\mathscr{E}$ всюду $t'(s) = +\infty$.*

Достаточно положить $s(t) = t^{-1}(t) + t$. Эта функция обладает требуемыми свойствами.

3. Так как $|\Delta x / \Delta s| \leqslant 1$, $|\Delta y / \Delta s| \leqslant 1$, то функции $x = x(s(t)) = \varphi(t)$, $y = y(s(t)) = F(\varphi(t))$ обладают всюду на $[\alpha, \beta]$ ограниченными производными, причем для всех t справедливо равенство (4).

Остается сделать замену переменного в правом интеграле (5), положив $s = s(t)$.

Теорема 3. *Если $f(x)$ конечна и интегрируема по Данжуа (в узком смысле) для $a \leqslant x \leqslant b$, то существует всюду дифференцируемая монотонная функция $x = \varphi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\alpha = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, для которой справедлива формула* (1), *где $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ есть точная конечная производная.*

Действительно:

1. Опять рассматриваем функцию $F(x)$ (см. (2)). В силу теоремы З. Загорского ([2]), для всякой кривой $\{x = x(t),\ y = y(t)\}$, для которой функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны и имеют обобщенное ограниченное изменение в узком смысле (на каждом совершенном множестве значений t существует порция, на которой функция имеет ограниченное изменение и ряд из ее колебаний на смежных к этой порции интервалах сходится), существует монотонное преобразование параметра $t = t(\theta)$ такое, что функции $x = x(t(\theta))$, $y = y(t(\theta))$ всюду дифференцируемы. Кривая, $y = F(x)$, будучи графиком неопределенного интеграла Данжуа в узком смысле, необходимо обладает обобщенным ограниченным изменением, и, следовательно, существует монотонная функция $x = x(\theta)$, $\mu \leqslant \theta \leqslant \nu$, для которой параметрическое представление $\{x = x(\theta),\ y = F(x(\theta))\}$ кривой $y = F(x)$ оказывается всюду дифференцируемым. Отсюда, кстати, вытекает абсолютная непрерывность функции $x(\theta)$. Можно доказать законность замены переменного в интеграле Данжуа с помощью монотонной абсолютно непрерывной функции. Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\mu^\nu f(x(\theta))\,x'(\theta)\,d\theta. \tag{6}$$

Почти для всех θ

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} F(x(\theta)) = f(x(\theta))\frac{dx}{d\theta}.$$

Множество значений θ, в которых это равенство не имеет места, обозначим через $\mathscr{E}$, $\operatorname{mes} \mathscr{E} = 0$.

2. Как и ранее, существует функция $\theta = \theta(t)$, растущая, обладающая всюду конечной производной, отображающая некоторый отрезок $[\alpha, \beta]$ оси Ot на отрезок $[\mu, \nu]$ оси $O\theta$, причем на множестве $T = \theta^{-1}(\mathscr{E})$ выполняется условие $\theta'(t) = 0$.

3. Так как $dx/d\theta$ и $dy/d\theta$ существуют всюду, то функции $x = x(\theta(t)) = \varphi(t)$, $y = y(\theta(t)) = F(\varphi(t))$ обладают всюду на $[\alpha, \beta]$ конечными производными, причем для всех t имеет место (4). Остается сделать замену переменного справа в (6), положив $\theta = \theta(t)$.

Замечание. Можно показать, что теорему 3 нельзя распространить на общий интеграл Данжуа — Хинчина.

Известно, что даже наиболее простое дифференциальное уравнение $dy/dx = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, не допускает для $a \leqslant x \leqslant b$ точного решения вида $y = F(x)$ уже когда $f(x)$ обладает единственной точкой разрыва первого рода.

Тем не менее справедлива

Теорема 4. *Если $f(x, y)$ определена и измерима в полосе $a \leqslant x \leqslant b$, удовлетворяет условию Липшица по y и, наконец, интегрируема по x в смысле узкого интеграла Данжуа, хотя бы для одного значения $y = y_1$, то дифференциальное уравнение*

$$dy = f(x, y)\,dx \tag{7}$$

допускает точное параметрическое решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, удовлетворяющее начальному условию: $y = y_0$ при $x = x_0$. При этом, когда t изменяется в пределах α, β, x изменяется в пределах a, b.

Действительно,

$$f(x, y) = f(x, y_1) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy, \tag{8}$$

где $\partial f/\partial y$ ограничена и существует почти всюду в полосе $a \leqslant x \leqslant b$.

Соотношение (8) показывает, что для любой непрерывной функции $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, сложная функция

$$f(x, y(x)) = f(x, y_1) + \int_{y_1}^{y(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

интегрируема по x в смысле узкого интеграла Данжуа на отрезке $[a, b]$ (второе слагаемое справа даже интегрируемо по Лебегу). Поэтому можем рекуррентно определить функции

$$y_{n+1} = \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx + y_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(y_0 — из начального условия). Обычным рассуждением (употребляемым в пикаровском методе последовательных приближений) доказывается равномерная сходимость последовательности $y_0, y_1, y_2, \ldots$ к некоторой (непрерывной) функции $y = y(x)$, для которой

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx + y_0.$$

В силу теоремы 3 здесь можно сделать замену переменного с помощью дифференцируемой монотонной функции $x = \varphi(t)$, $x_0 = \varphi(t_0)$, так, чтобы под интегралом оказалась точная производная. Положив $y(\varphi(t)) = \psi(t)$, найдем

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} f(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)\, dt + y_0.$$

Функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, очевидно, всюду удовлетворяют уравнению (7) и $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = t_0$.

Замечание. Если ограничиваться случаем монотонной $\varphi(t)$, а в построенном нами решении это именно так (и отвлечься от тривиального решения $x = x_0 = \text{const}$, $y = y_0 = \text{const}$), то можно доказать, что с точностью до преобразования параметра решение единственно.

С помощью некоторого обобщения теоремы 3 можно распространить теорему 4 на систему вида $dy_i = f_i(x, y_1, y_2, \ldots; y_n)\, dx$, $a \leqslant x \leqslant b$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где предполагается, что каждая f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяет условию Липшица по y_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, и интегрируема по x в смысле узкого интеграла Данжуа хотя бы для одной точки $(y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni})$. В случае монотонного преобразования $x = \varphi(t)$ решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, с точностью до преобразования параметра единственно.

Артиллерийская академия
им. Дзержинского

Поступило
22 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Толстов, Матем. сборн., 8 (50) (1940). [2] З. Загорский, Матем. сборн., 22 (64), 1948.