Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

В. И. ПЛОТКИН

К ТЕОРИИ НЕКОММУТАТИВНЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 5 VI 1950)

Следуя работе (1), приведем некоторые определения.

Подгруппа H группы $\mathfrak{G}$ называется изолированной (в $\mathfrak{G}$), если из $g^m \in H$, $m > 0$, следует $g \in H$.

Изолятором $I(H)$ подгруппы H в $\mathfrak{G}$ называется наименьшая изолированная подгруппа в $\mathfrak{G}$, содержащая H.

Группа без кручения называется R-группой, если централизатор каждого ее элемента изолирован.

R-группу, у которой всякая фактор-группа по инвариантной изолированной подгруппе также является R-группой, мы будем называть R^*-группой.

В заметке рассматриваются некоторые свойства R^*-групп.

Ясно, что не всякая R-группа является R^*-группой. Вместе с тем класс R^*-групп довольно широк и включает значительное число известных классов групп без кручения: группы без кручения нильпотентные, локально-нильпотентные, группы без кручения с нормализаторным условием являются R^*-группами. Можно привести ряд других примеров R^*-групп.

§ 1. Группа без кручения с нормализаторным условием (группа без кручения, специальная в смысле О. Ю. Шмидта) является R^*-группой. Это следует из работы (2). Применяя к группам указанного вида теорию R-групп, мы получим некоторые свойства изолированных подгрупп таких групп. В частности, чисто групповым путем получается результат, ранее доказанный А. И. Мальцевым (3), в более узкой формулировке, на основании топологических соображений.

Определение (1). Коммутаторным частным $S \div T$ двух комплексов S и T группы $\mathfrak{G}$ называется множество всех элементов $x \in \mathfrak{G}$, для которых $x^{-1}t^{-1} \times t \in S$ при любом $t \in T$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{G} = FH$ — полупрямое произведение с нормальным делителем F. Пусть $B = AH \subset \mathfrak{G}$ также полупрямое произведение, где A — подгруппа из F, инвариантная в B. Тогда для нормализатора $N(B)$ имеют место следующие формулы:*

$$N(B) = (N(B) \cap F)H; \quad N(B) \cap F = N(A) \cap F \cap A \div H.$$

Замечание. Данная лемма является непосредственным обобщением леммы П. Г. Конторовича (4) и доказывается аналогичным образом. Случай П. Г. Конторовича получается, если положить $A = 1$, $B = H$.

Теорема 1. *В группе без кручения с нормализаторным условием нормализатор изолированной подгруппы есть изолированная подгруппа.*

Доказательство. Теорема утверждает, что для всякой изолированной подгруппы F группы без кручения $\mathfrak{G}$ с нормализаторным условием из перестановочности элемента g^n, $g \in \mathfrak{G}$, с F следует перестановочность элемента g с F. Для доказательства строим возрастающую последовательность подгрупп по следующему закону:

$$F_1 = I(N(\{g^n\}) \cap F).$$

Пусть уже построены все F_α для $\alpha < \beta$. Тогда для предельного порядкового числа β мы определим F_β как объединение всех F_α с $\alpha < \beta$, а для непредельного α F_β определяется через

$$F_\beta = I(N(F_{\beta-1}\{g^n\} \cap F).$$

Построенная последовательность обладает следующими свойствами:

1) Последовательность $\ldots, F_\alpha, \ldots$, возрастает, все ее члены F_α изолированы в $\mathfrak{G}$ и содержатся в F.

Это следует из конструкции и из того, что F изолирована в $\mathfrak{G}$.

2) Последовательность доходит до F.

Это свойство обеспечивается нормализаторным условием.

3) Все F_α перестановочны с элементом g.

Доказательство этого свойства проводится индукцией, если воспользоваться леммой 1 и тем фактом, что все подгруппы группы без кручения с нормализаторным условием являются R^*-группами.

Из отмеченных трех свойств нашей последовательности вытекает теорема.

Следствием теоремы 1 является теорема 2.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — группа без кручения с нормализаторным условием, A и B — подгруппы, причем A — нормальный делитель в B. Тогда $I(A)$ — нормальный делитель в $I(B)$.*

Примечание. Аналогичная теорема была доказана А. И. Мальцевым ([3]) для групп без кручения с возрастающим центральным рядом на основании топологических методов.

Теорема 3. *Группа без кручения с нормализаторным условием обладает возрастающим рациональным рядом (т. е. нормальным рядом, все факторы которого изоморфны подгруппам аддитивной группы рациональных чисел). Такой ряд можно провести через произвольную изолированную подгруппу.*

Лемма 2. *Инвариантная изолированная рациональная подгруппа в группе без кручения с нормализаторным условием содержится в центре группы.*

Для доказательства достаточно воспользоваться леммой 1 и изолированностью централизаторов в R-группах.

Из леммы вытекает следующее предложение.

Теорема 4. *Если группа без кручения с нормализаторным условием обладает возрастающим инвариантным рациональным рядом, то этот ряд будет центральным.*

§ 2. Из предыдущих рассуждений следует, что для групп без кручения с нормализаторным условием наличие в группе возрастающего инвариантного рационального ряда эквивалентно существованию возрастающего центрального ряда.

В общем случае для R^*-групп имеет место следующая теорема:

Теорема 5. *R^*-группа $\mathfrak{G}$ с возрастающим инвариантным рациональным рядом содержит изолированную инвариантную подгруппу $\mathfrak{G}'$ такую, что $\mathfrak{G}'$ обладает возрастающим центральным рядом, а фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ будет абелевой без кручения.*

Для доказательства используются вспомогательные леммы:

Лемма 3. *Всякий изолированный рациональный нормальный делитель группы содержится в централизаторе коммутанта этой группы.*

Лемма 4. *Коммутант группы с возрастающим инвариантным рациональным рядом обладает возрастающим центральным рядом.*

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{G}$ — R^*-группа, K — ее характеристическая подгруппа, обладающая возрастающим центральным рядом. Тогда изолятор $I(K)$ также обладает возрастающим центральным рядом.*

Теорема 6. *В R^*-группе с возрастающим инвариантным рациональным рядом через произвольную изолированную инвариантную подгруппу можно провести возрастающий инвариантный рациональный ряд.*

Теорема 7. *Группа, инвариантно покрываемая R^*-группами, будет сама R^*-группой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}_\alpha$ — компоненты инвариантного покрытия группы $\mathfrak{G}$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/F$ группы $\mathfrak{G}$ по изолированной инвариантной подгруппе F инвариантно покрываема группами $\mathfrak{G}_\alpha F/F$. Из $\mathfrak{G}_\alpha F/F \approx \mathfrak{G}_\alpha/\mathfrak{G}_\alpha \cap F$ следует, что все $\mathfrak{G}_\alpha F/F$ — R-группы, ибо $\mathfrak{G}_\alpha$ — R^*-группы по условию. Таким образом, $\mathfrak{G}/F$ инвариантно покрывается R-группами и, следовательно, сама R-группа (1), т. е. $\mathfrak{G}$ — R^*-группа.

Пример. $\mathfrak{G}$ — группа матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$, где x, z — положительные рациональные числа, y — любое рациональное число.

$\mathfrak{G}$ будет R^*-группой: это непосредственно вытекает из предыдущей теоремы. Группа $\mathfrak{G}$ имеет инвариантный рациональный ряд, но не имеет возрастающего центрального ряда.

Приведенный пример позволяет утверждать, что класс R^*-групп с возрастающим инвариантным рациональным рядом, вообще, шире, чем класс групп без кручения с возрастающим центральным рядом.

Автор выражает благодарность проф. П. Г. Конторовичу за ценные советы при выполнении работы.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
9 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Г. Конторович, Матем. сборн., **22** (64), 2, 79 (1948). [2] Н. Ф. Сесекин, ДАН, **70**, № 2 (1950). [3] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 201 (1949). [4] П. Г. Конторович, ДАН, **22**, № 9 (1939).