Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 29 V 1950)

Пусть $L(y) = y^{(p)} + a_1(x) y^{(p-1)} + \cdots + a_p(x) y$ $(-\infty \leqslant x \leqslant \infty)$ есть самосопряженное дифференциальное выражение порядка p с действительными и ограниченными в каждом конечном промежутке коэффициентами $a_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Обозначим через $\varphi_j(x, \lambda)$ решение дифференциального уравнения

$$L(y) + \lambda y = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_j^{(i-1)}(0, \lambda) = \delta_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i. \end{cases} \tag{2}$$

Из метода последовательных приближений легко следует, что для каждого фиксированного прямоугольника $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$ найдется такое постоянное число $A > 0$, что

$$|\varphi_j^{(i-1)}(x, \lambda)| < A$$

$$(1 \leqslant j \leqslant p, \quad 1 \leqslant i \leqslant p+1, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad \lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1). \tag{3}$$

Из неравенства (3) и теоремы о конечном приращении следует неравенство $(1 \leqslant i,\ j \leqslant p;\ x_0 \leqslant x \leqslant x_1,\ \lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1)$:

$$|\varphi_j^{(i-1)}(x, \lambda) - \delta_j^{(i)}| = |\varphi_j^{(i-1)}(x, \lambda) - \varphi_j^{(i-1)}(0, \lambda)| = $$
$$= |x|\,|\varphi_j^{(i)}(\theta x, \lambda)| < |x| A. \tag{4}$$

Среди многих интересных результатов в работах М. Г. Крейна [1,2] содержится следующая теорема:

*Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют непрерывные p-е производные и обращаются в нуль вне конечного интервала (α, β). Существует, по крайней мере, одна симметричная, монотонно возрастающая**

* Матрица-функция $T(\lambda)$ называется монотонно возрастающей, если для любого интервала $\Delta = (\lambda, \lambda + \Delta)$ и любых комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ выполняется неравенство

$$\sum_{i, j=1}^{p} t_{ij}(\Delta) \xi_i \bar{\xi}_j \geqslant 0 \quad (t_{ij}(\Delta) = t_{ij}(\lambda + \Delta) - t_{ij}(\lambda)). \tag{5}$$

матрица-функция $T(\lambda) = \{t_{ij}(\lambda)\}_{i,j=1}^{p}$ $(t_{ij}(\lambda) = t_{ji}(\lambda),\quad -\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty)$, *для которой имеет место обобщенное равенство Парсеваля*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, g(x)\, dx = \sum_{i,\, j=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\lambda)\, G_j(\lambda)\, dt_{ij}(\lambda), \tag{6}$$

где

$$F_i(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, \varphi_i(x, \lambda)\, dx, \quad G_i(\lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, \varphi_i(x, \lambda)\, dx \quad (1 \leqslant i \leqslant p).$$

В настоящей заметке дается простое доказательство этой теоремы*.

Пусть (a, b) $(a < \alpha < \beta < b)$ — фиксированный интервал. Присоединим на концах интервала (a, b) к уравнению (1) граничные условия так, чтобы получалась самосопряженная однородная граничная задача. Обозначим через $y_n(x)$ нормированные собственные функции и через λ_n — соответствующие собственные значения этой задачи. Пусть $y_n(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(n)} \varphi_i(x, \lambda_n)$.

Применив к функции $f(x)$ равенство Парсеваля, мы получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, y_n(x)\, dx \right\}^2 = \sum_{|\lambda_n| \leqslant \mu} + \sum_{|\lambda_n| > \mu}. \tag{7}$$

В силу тождества Грина

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, y_n(x)\, dx = -\frac{1}{\lambda_n} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, L\{y_n(x)\}\, dx = -\frac{1}{\lambda_n} \int_{\alpha}^{\beta} \{Lf(x)\}\, y_n(x)\, dx.$$

Поэтому, применяя неравенство Бесселя, мы получим

$$\sum_{|\lambda_n| > \mu} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, y_n(x)\, dx \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu^2} \sum_{|\lambda_n| > \mu} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \{Lf(x)\}\, y_n(x)\, dx \right\}^2 \leqslant \frac{1}{\mu^2} \int_{\alpha}^{\beta} \{Lf(x)\}^2\, dx. \tag{8}$$

Далее мы имеем

$$\sum_{|\lambda_n| \leqslant \mu} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, y_n(x)\, dx \right\}^2 =$$

$$= \sum_{|\lambda_n| \leqslant \mu} \sum_{i,\, j=1}^{p} \alpha_i^{(n)} \alpha_j^{(n)} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, \varphi_i(x, \lambda_n)\, dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, \varphi_j(x, \lambda_n)\, dx =$$

$$= \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{i,\, j=1}^{p} F_i(\lambda)\, F_j(\lambda)\, dt_{ij}(\lambda; a, b),$$

---

* Для $p = 2$ теорема была доказана Вейлем [3] и затем другим методом Титчмаршем [4]. В настоящей заметке мы пользуемся тем же методом, что и в нашей книге [5] (теорема 2.2.1). Заметим, кстати, что в нашей книге доказательство не безупречно. В настоящей заметке оценка проводится более аккуратно.

где положено

$$t_{ij}(\lambda;\, a,\, b) = \begin{cases} -\sum\limits_{0 \geqslant \lambda_n > \lambda} \alpha_i^{(n)} \alpha_j^{(n)} & (\lambda \leqslant 0) \\ \sum\limits_{0 < \lambda_n \leqslant \lambda} \alpha_i^{(n)} \alpha_j^{(n)} & (\lambda > 0). \end{cases}$$

Лемма. *В любом конечном фиксированном интервале* $(-\mu, \mu)$ *вариации функций* $t_{ij}(\lambda; a, b)$ *ограничены равномерно по* (a, b).

Доказательство. Рассмотрим p функций $\delta_i(x; h)$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, обладающих следующими свойствами: 1) $\delta_i(x; h)$ имеют непрерывные производные до $(i-1)$-го порядка включительно; 2) $\delta_i(x; h) \geqslant 0$ и вне интервала $(0, h)$ $\delta_i(x; h) \equiv 0$; 3) $\int\limits_0^h \delta_i(x; h)\, dx = 1$. Применим к функции $\delta_i^{(i-1)}(x; h)$ равенство Парсеваля. Мы получим, интегрируя $(i-1)$ раз по частям

$$\int\limits_0^h \{\delta_i^{(i-1)}(x; h)\}^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int\limits_0^h \delta_i^{(i-1)}(x; h)\, y_n(x)\, dx\right\}^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int\limits_0^h \delta_i(x; h)\, y_n^{(i-1)}(x)\, dx\right\}^2. \tag{9}$$

В силу неравенства (4) и свойства 3) функций $\delta_i(x; h)$ для λ_n в фиксированном интервале $(-\mu, \mu)$ можно указать столь малое число $h > 0$, что будут выполняться неравенства

$$\frac{3}{2} > \int\limits_0^h \delta_i(x; h)\, \varphi_i^{(i-1)}(x, \lambda_n)\, dx > \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$\left|\int\limits_0^h \delta_i(x; h)\, \varphi_j^{(i-1)}(x, \lambda_n)\, dx\right|$ [redacted] $\frac{1}{4p(p-1)}$ $(j \neq i)$.

Поэтому

$$\left\{\int\limits_0^h \delta_i^{(i-1)}(x; h)\, y_n(x)\, dx\right\}^2 = \left\{\sum_{j=1}^{p} \alpha_j^{(n)} \int\limits_a^h \delta_i(x; h)\, \varphi_j^{(i-1)}(x; \lambda_n)\, dx\right\}^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \{\alpha_j^{(n)}\}^2 \left\{\int\limits_0^h \delta_i(x; h)\, \varphi_j^{(i-1)}(x, \lambda_n)\, dx\right\}^2 +$$

$$+ 2 \sum_{j>k} \alpha_j^{(n)} \alpha_k^{(n)} \int\limits_0^h \delta_i(x; h)\, \varphi_j^{(i-1)}(x, \lambda_n)\, dx \cdot \int\limits_0^h \delta_i(x; h)\, \varphi_k^{(i-1)}(x, \lambda_n)\, dx >$$

$$> \frac{1}{2} \{\alpha_i^{(n)}\}^2 - \frac{3}{8p(p-1)}\, 2 \sum_{j>k} |\alpha_j^{(n)}|\, |\alpha_k^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2} \{\alpha_i^{(n)}\}^2 - \frac{3}{8p} \sum_{j=1}^{p} \{\alpha_j^{(n)}\}^2\ ^{*}.$$

* В силу элементарного неравенства

$$2 \sum_{j>k} |\alpha_j^{(n)}|\, |\alpha_k^{(n)}| \leqslant (p-1) \sum_{j=1}^{p} \{\alpha_j^{(n)}\}^2.$$

В силу этой оценки из (9) следует неравенство

$$\int_0^h \{\delta_i^{(i-1)}(x;\,h)\}^2\,dx > \frac{1}{2}\sum_{|\lambda_n|\leqslant\mu}\{\alpha_i^{(n)}\}^2 - \frac{3}{8p}\sum_{|\lambda_n|\leqslant\mu}\sum_{j=1}^{p}\{\alpha_j^{(n)}\}^2.$$

Полагая в последнем неравенстве $i = 1, 2, \ldots, p$ и суммируя, мы получим

$$\sum_{i=1}^{p}\int_0^h \{\delta_i^{(i-1)}(x;\,h)\}^2\,dx \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{|\lambda_n|\leqslant\mu}\{\alpha_i^{(n)}\}^2 -$$

$$- \frac{3}{8p}\sum_{i=1}^{p}\sum_{|\lambda_n|\leqslant\mu}\sum_{j=1}^{p}\{\alpha_j^{(n)}\}^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{p}\sum_{|\lambda_n|\leqslant\mu}\{\alpha_i^{(n)}\}^2.$$

Отсюда следует оценка

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{|\lambda_n|\leqslant\mu}\{\alpha_i^{(n)}\}^2 \leqslant 8\sum_{i=1}^{p}\int_0^h \{\delta_i^{(i-1)}(x;\,h)\}^2\,dx.$$

В последнем неравенстве правая часть от интервала (a, b) не зависит. Поэтому для $t_{ii}(\lambda;\,a,\,b)$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ лемма доказана.

Для $t_{ij}(\lambda;\,a,\,b)$ $(i \neq j)$ лемма следует из неравенства Коши — Буняковского. В силу известной теоремы Хелли существует, по крайней мере, одна предельная матрица-функция $T(\lambda) = \{t_{ij}(\lambda)\}_{i,\,j=1}^{p}$. Для доказательства неравенства (5) заметим, что для любых комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,\,j=1}^{p} t_{ij}(\Delta;\,a,\,b)\,\xi_i\overline{\xi}_j = \sum_{i,\,j=1}^{p}\xi_i\overline{\xi}_j\sum_{\lambda<\lambda_n\leqslant\lambda+\Delta}\alpha_i^{(n)}\alpha_j^{(n)} = \sum_{\lambda<\lambda_n\leqslant\lambda+\Delta}\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^{(n)}\xi_i\right|^2 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство в пределе $(a \to -\infty,\ b \to \infty)$ дает неравенство (5).

Перепишем равенство (7) в виде

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx = \sum_{i,\,j=1}^{p}\int_{-\infty}^{\infty} F_i(\lambda)\,F_j(\lambda)\,dt_{ij}(\lambda;\,a,\,b). \tag{10}$$

В силу оценки (8) и леммы в равенстве (10) можно совершить предельный переход, полагая $a \to -\infty$, $b \to \infty$, и мы получим

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx = \sum_{i,\,j=1}^{p}\int_{-\infty}^{\infty} F_i(\lambda)\,F_j(\lambda)\,dt_{ij}(\lambda).$$

Применяя последнее равенство вначале к функции $f(x) + g(x)$, а затем к функции $f(x) - g(x)$ и вычитая, мы получим равенство (6). Распространение равенства (6) на более широкие классы функций осуществляется так же, как и в ([2]).

Поступило
21 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, Сборн. работ Ин-та матем. АН УССР, № 10, 83 (1948). [2] М. Г. Крейн, Украинск. матем. журн., 2, I (1949). [3] H. Weyl, Göttinger Nachr., 442 (1910). [4] E. C. Titchmarsh, Eigenfunctions Expansions..., Oxford, 1946. [5] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям..., 1950.