Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

О. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

О РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 31 V 1950)

Смешанная задача для гиперболических уравнений исследовалась многими авторами. Однако до сих пор остался открытым вопрос о существовании классического решения этой задачи по всей области задания уравнения.

Решению этого вопроса и посвящена данная работа.

Уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(X)u-\varphi(X,t) \tag{1}$$

задано для $t\geqslant 0$ и точки $X=(x_1,\ldots,x_n)$, принадлежащей области Ω*, граница которой Γ состоит из кусочно-гладких самонепересекающихся поверхностей. Коэффициенты $a_{ij}(X)$ обладают в $\overline{\Omega}$ непрерывными производными по x_i до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+3$, а $b_i(X)$ и $c(X)$ — до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+2$.

Для функции $\varphi(X,t)$ существуют непрерывные вплоть до границы производные

$$\frac{\partial^{k_0+k}\varphi(X,t)}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$$

$$\text{для}\quad 0\leqslant k_0+k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+4,\quad 0\leqslant k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+2,$$

такие, что

$$\left|\frac{\partial^{k_0+k}\varphi}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right|\leqslant Ce^{\lambda_0 t},$$

где C и λ_0 — некоторые постоянные и

$$\left.\frac{\partial^k\varphi}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0,\quad k=0,1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]+3.$$

* Односвязность Ω не предполагается.

Выполнение этих требований для функции φ гарантирует для функции

$$\psi(X,\lambda)=\int_0^\infty \varphi(X,t)\,e^{-\lambda t}dt,\quad \lambda=\lambda_1+i\lambda_2,\quad \lambda_1\geqslant\lambda_0'<\lambda_0,$$

оценки

$$\left|\frac{\partial^k\psi}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right|\leqslant C_1|\lambda|^{-\left[\frac{n}{2}\right]-4+k},\quad k=0,1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]+2. \tag{2}$$

При перечисленных условиях строится решение $u(X,t)$ уравнения (1), имеющее непрерывные вторые производные, когда точка X находится внутри Ω, а $t\geqslant 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u\,|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$

принимающее в среднем нулевые предельные условия, именно:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_{S_r}u^2d\Omega=0, \tag{3}$$

где S_r — контурная полоса ширины r, и такое, что

$$\int_\Omega\left(u^2+u_t^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)d\Omega,$$

существует и ограничен в любом конечном промежутке изменения $t\in[0,T]$.

Доказывается, что такое решение единственно.

Переходим к построению функции $u(x,t)$.

Применяя к уравнению (1) преобразование Лапласа по переменной t и обозначая

$$v(X,\lambda)=\int_0^\infty u(X,t)\,e^{-\lambda t}dt,$$

$$\psi(X,\lambda)=\int_0^\infty \varphi(X,t)\,e^{-\lambda t}dt,\quad \lambda=\lambda_1+i\lambda_2,\quad \lambda_1\geqslant\lambda_0'>\lambda_0\geqslant 0,$$

получим уравнение для определения функции v:

$$L(v)=\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)+\sum_i b_i\frac{\partial v}{\partial x_i}+cv=\lambda^2v+\psi \tag{4}$$

с краевым условием $v|_\Gamma=0$.

Заменим уравнение (4) разностным, вводя при этом обычные в методе сеток обозначения ([1]):

$$L_h(v)=\sum_{ij}\frac{\overline{\Delta}}{\Delta x_i}\left(a_{ij}\frac{\Delta v}{\Delta x_j}\right)+\sum_i b_i\frac{\Delta v}{\Delta x_i}+cv=\lambda^2v+\psi. \tag{5}$$

Совокупность узлов кубической сетки, лежащих внутри Ω, обозначим через Ω_h $(\Delta x_i = h)$.

Умножим (5) на $\bar{v}$ и просуммируем его по всем внутренним узлам Ω_h. Затем, используя граничное условие $v|_\Gamma = 0$, произведем суммирование по частям в двойной сумме $\sum_{ij}$. Тогда получим:

$$h^n \sum_{\Omega_h} \left\{ -\sum_{ij} a_{ij} \frac{\Delta v}{\Delta x_i} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta x_j} + \sum_i b_i \frac{\Delta v}{\Delta x_i} \bar{v} + c|v|^2 \right\} = h^n \sum_{\Omega_h} \{\lambda^2 |v|^2 + \psi \bar{v}\}. \tag{6}$$

Беря λ_0' достаточно большим, мы можем получить из (5) оценки:

$$\begin{gathered} h^n \sum_{\Omega_h} |v|^2 \leqslant \frac{C_2}{|\lambda|^2} h^n \sum_{\Omega_h} |\psi|^2, \\ h^n \sum_{\Omega_h} \sum_{l=1}^{n} \left| \frac{\Delta v}{\Delta x_i} \right|^2 \leqslant C_3 h^n \sum_{\Omega_h} |\psi|^2, \end{gathered} \tag{7}$$

где постоянные C_i зависят лишь от коэффициентов уравнения (1).

Из (7) видим, что решение разностного уравнения (5) единственно и, следовательно, существует.

Используя уравнение (5), можно получить оценки вида:

$$h^n \sum_{\Omega_h'} \sum_{k=1}^{l} \sum_{\Sigma k_i = k} \left| \frac{\Delta^k v}{\Delta x_1^{k_1} \ldots \Delta x_n^{k_n}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_4 h^n \sum_{\Omega_h''} \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{\Sigma k_i = k} |\lambda|^{2(l-1-k)} \left| \frac{\Delta^k \psi}{\Delta x_1^{k_1} \ldots \Delta x_n^{k_n}} \right|^2, \quad l = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] + 2. \tag{8}$$

Постоянная C^4 зависит от Ω' и $\Omega'' \subset \Omega$, причем Ω' есть любая область, лежащая строго внутри Ω''.

Пусть h по какому-либо закону стремится к нулю (например, $h = 1/2^m$, $m \to \infty$).

Распространяя теорему вложения, доказанную С. Л. Соболевым [2], на случай разностных отношений, получаем равномерную в любой внутренней подобласти Ω' области Ω сходимость некоторой подпоследовательности v_{n_k}* (а также $\Delta v_{hk}/\Delta x_i$, $\Delta^2 v_{hk}/\Delta x_i \Delta x_j$) при $h_k \to 0$ к функции v (соответственно $\partial v/\partial x_i$ и $\partial^2 v/\partial x_i \partial x_j$), которая и будет решением поставленной задачи.

Для функции v выполняется условие (3).

Кроме того, для функции v имеют место следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^l v}{\partial x_i^{k_i} \partial x_j^{k_j}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \left\{ \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]+l} |\lambda|^{\left[\frac{n}{2}\right]+l-k} \sqrt{\int_{\Omega''} \sum_{\Sigma k_i = k} \left| \frac{\partial^k \psi}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} \right|^2 d\Omega} \right\}, \quad l = 0, 1, 2, \tag{9}$$

---

* Для уравнения (4) доказывается теорема единственности, именно: если дважды непрерывно дифференцируемая внутри Ω функция v удовлетворяет уравнению (4) для $\psi \equiv 0$, если $\int_\Omega \left(v^2 + \sum_i v_{x_i}^2\right) d\Omega$ ограничен и выполняется условие (3), то $v \equiv 0$. Из этой теоремы следует, что вся последовательность v_h будет равномерно для каждой подобласти Ω' области Ω сходиться к пределу v.

для любой подобласти $\Omega' \subset \Omega'' \subset \Omega$. Постоянная C_4 зависит от областей Ω' и Ω''.

Условие (2) совместно с оценками (9) гарантирует решение предельной задачи для уравнения (1), обладающее вышеуказанными свойствами.

При $n = 2$ решение $u(X, t)$ будет непрерывно вплоть до контура Γ и функция $u|_\Gamma = 0$.

Поступило
27 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Courant, K. Friedrichs u. H. Lewy, Math. Ann., **100** (1928); русск. пер. Усп. матем. наук, в. 8 (1941). [2] С. Л. Соболев, Матем. сборн., **2** (44) : 3 (1937).