Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

В. Я. КОЗЛОВ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ БАЗИСА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 V 1950)

1. В определении базиса, данном Банахом, каждому элементу пространства Банаха E ставится в соответствие ряд по системе $\{x_n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\, x_n, \tag{1}$$

который сильно сходится к элементу x. Коэффициенты $c_n(x)$ определяются элементом x однозначно. Если в этих условиях сильную сходимость ряда заменить слабой сходимостью, то, как известно, никакого обобщения понятия базиса не получается. То определение базиса, которое мы дадим сейчас, будет опираться на методы суммирования числовых рядов.

Пусть дана числовая матрица

$$T = (t_{ij}),$$

которая обладает следующими свойствами:

1) $\lim\limits_{i\to\infty} t_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots;$

2) $\lim\limits_{\to\infty} T_i = 1, \quad$ где $T_i = t_{i1} + t_{i2} + \ldots + t_{ik} + \ldots;$

3) существует постоянное число C такое, что $N_i < C$, где

$$N_i = |t_{i1}| + |t_{i2}| + \ldots + |t_{ik}| + \ldots$$

Определение. Систему элементов $\{x_i\}$ $\{x_i \subset E, \|x_i\| = 1, i = 1, 2, \ldots\}$ будем называть T-базисом в пространстве E в том случае, если каждому элементу x ставится в соответствие ряд (1), для которого элементы $\sigma_n(x)$

$$\sigma_n(x) = t_{n1}\, S_1(x) + t_{n2}\, S_2(x) + \ldots + t_{nk}\, S_k(x), \tag{2}$$

где $S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} c_n(x)\, x_n$, определены и сильно сходятся к элементу x. Ряд (1) по элементу x определяется однозначно, ряд (2) сходится сильно (это предположение можно не делать, например, достаточно слабой сходимости ряда (2)).

Без труда можно показать, что всякий базис Банаха будет T-базисом. Но, с другой стороны, легко построить такие T-базисы, которые не будут базисом Банаха.

Пример. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \ldots & \ldots \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

T-базисы с такой матрицей будем называть для краткости базисами Чезаро. Легко видеть, что в пространстве непрерывных функций тригонометрическая система образует базис Чезаро. В пространстве Гильберта H также существуют базисы Чезаро, которые не будут базисами Банаха.

Пусть система элементов $\{e_n\}$ полна, ортогональна и нормирована в H. Систему элементов $\{x_n\}$ определим равенствами

$$x_n = e_n - e_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для системы элементов $\{x_n\}$ легко построить сопряженную систему. Сопряженной системой для $\{x_n\}$ будет система $\{y_n\}$, где

$$y_n = e_1 + e_2 + \ldots + e_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Легко устанавливается, что система элементов $\{x_n\}$ является базисом Чезаро в пространстве H и нормы элементов сопряженной системы $\{y_n\}$ растут неограниченно вместе с n ($\| y_n \| = \sqrt{n}$). Таким образом, система элементов не может быть базисом Банаха.

Так же как для базисов Банаха, можно доказать существование сопряженной системы для T-базисов с матрицами T, которые имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots \\ t_{21} & t_{22} & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & 0 \ldots & 0 \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \ldots \ldots & t_{nn} \; 0 \ldots \end{pmatrix}, \tag{3}$$

т. е. верна теорема:

Теорема 1. *Пусть дан T-базис в пространстве H, причем матрица T имеет вид* (3). *Тогда существует система функционалов $\{F_i(x)\}$, которая обладает следующим свойством:*

$$F_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Нормы функционалов $F_i(x)$ могут быть неограничены в совокупности, но с помощью элементов матрицы T можно произвести оценку роста норм функционалов сопряженной системы. Так например, для сопряженной системы базиса Чезаро получаем оценку

$$\| F_n(x) \| = O(n).$$

Так же как и для базисов Банаха, для T-базисов возникает задача о возможных порядках роста норм элементов сопряженных систем. Будет ли при этом порядок роста зависеть от пространства или можно во всяком пространстве отыскать T-базис с заданным ростом норм элементов сопряженной системы (в определенных пределах)? Так же пока неясно существование T-базисов во всяком пространстве Банаха.

2. Для простоты во второй части работы мы ограничимся рассмотрением только базисов Банаха в E. Рассмотрим всевозможные базисы пространства E, которые мы будем обозначать $\{x_n\}$, $\{y_n\}, \ldots$ Сопряженные системы мы будем обозначать $\{F_i(x)\}$, $\{\Phi_i(x)\}$.

Два базиса $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ мы будем называть эквивалентными, если для каждого n и каждого $x \subset E$ выполняется равенство

$$F_n(x)\, x_n = \Phi_n(x)\, y_n,$$

где $\{F_n(x)\}$ — система функционалов, сопряженная базису $\{x_n\}$, а $\{\Phi_n(x)\}$ — базису $\{y_n\}$.

По заданному базису легко можно описать все ему эквивалентные базисы. Из определения эквивалентности следует

$$y_n = \frac{F_n(x)}{\Phi_n(x)}\, x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как норма элементов базисов равна единице, то

$$F_n(x) = \lambda_n \Phi_n(x), \quad y_n = \lambda_n x_n, \quad \text{где } |\lambda_n| = 1. \tag{4}$$

Обратно, если элементы базиса связаны соотношением (4), то базисы эквивалентны.

Базис $\{x_i\}$ и с ним связанный класс эквивалентных базисов мы будем рассматривать как элемент нового метрического пространства R.

Элементы нового пространства будем обозначать соответствующими большими буквами X, Y, ... Расстоянием между двумя элементами X и Y пространства R мы будем называть число

$$\rho(XY) = \sup_{\|x\|=1} \sup_{N=1,2,\ldots} \left\| \sum_{i=1}^{N} F_i(x)\, x_i - \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(x)\, y_i \right\|. \tag{5}$$

Легко видеть, что все три свойства метрического пространства выполнены: аксиомы симметрии и треугольника очевидны, а аксиома тождества вытекает из определения эквивалентных базисов.

Теорема 2. *Множество R для любого пространства Банаха E со счетной базой образует полное метрическое пространство с метрикой* (5).

При доказательстве теоремы 2 используется лемма.

Лемма. *Пусть заданы последовательности функционалов $F^{(n)}(x)$ и элементов $x^{(n)}$ в пространстве E, удовлетворяющие условиям:*

1) $\|x^{(n)}\| = 1$ *для* $n = 1, 2, \ldots;$

2) $F^{(n)}(x^{(n)}) = 1$ *для* $n = 1, 2, \ldots;$

3) *для всякого ε можно указать такое N, что для всякого $n > N$ и $p > 0$ имеет место неравенство*

$$\|x^{(n)} F^{(n)}(x) - x^{(n+p)} F^{(n+p)}(x)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех } x, \quad \|x\| \leqslant 1.$$

Тогда найдется функционал $F(x)$ и элемент x^0 такой, что

$$\|x^0 F(x) - x^{(n)} F^{(n)}(x)\| \to 0, \quad \text{когда } n \to \infty,$$

для любого значения $x \subset E$.

Если E совпадает с пространством H, то „норма" элемента пространства R будет равна верхней грани чисел Банаха. Из этого следует, что все ортогональные базисы пространства H лежат на некоторой сфере радиуса единица. Пространство R в этом случае неограничено и обладает рядом других интересных свойств.

Поступило
22 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Банах, Курс функционального анализа, 1947.