Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

И. Е. ЖАК

АБСОЛЮТНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ДВОЙНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 3 VI 1950)

Как известно ([1]), ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ называется суммируемым методом Чезаро порядка (α, β), $\alpha, \beta > -1$, или (C, α, β)-суммируемым к числу s, если

$$\sigma_{mn}^{\alpha\beta} = (A_m^\alpha A_n^\beta)^{-1} S_{mn}^{\alpha\beta} \to s, \quad m, n \to \infty,$$

где числа A_p^γ, $\gamma > -1$, $S_{mn}^{\alpha\beta}$ определяются из формальных соотношений

$$\sum_{p=0}^{\infty} A_p^\gamma x^p = (1-x)^{-\gamma-1}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} S_{mn}^{\alpha\beta} x^m y^n = \frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n}{(1-x)^{\alpha+1}(1-y)^{\beta+1}}.$$

Метод (C, α, β) не является по своим свойствам аналогом известного метода Чезаро суммирования простых числовых рядов, в частности, методы (C, α, β) и $(C, \alpha+h, \beta+\eta)$, $h, \eta > 0$, вообще говоря, несравнимы.

В настоящей заметке вводится понятие абсолютной (C, α, β)-суммируемости двойного числового ряда и дается приложение к двойным тригонометрическим рядам.

Скажем, что двойная последовательность $\{u_{mn}\}$ принадлежит к классу H, если она имеет ограниченное изменение по совокупности индексов и, кроме того, ограниченное изменение по каждому индексу в отдельности при фиксированном другом, т. е. выполняются следующие условия:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |u_{mn} - u_{m-1\,n} - u_{m\,n-1} + u_{m-1\,n-1}| < \infty; \tag{1}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_{mn} - u_{m-1\,n}| < \infty; \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_{mn} - u_{m\,n-1}| < \infty. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что если $\{u_{mn}\}$ удовлетворяет условию (1) и условию (2) для некоторого значения n, то она удовлетворяет условию (2) для любого фиксированного n. То же самое относительно условия (3).

Определение. Ряд $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ абсолютно (C, α, β)-суммируем или суммируем $|C, \alpha, \beta|$, $\alpha, \beta > -1$, если последовательность $\{\sigma_{mn}^{\alpha\beta}\}$ принадлежит к классу H.

В частности, $|C, 0, 0|$-суммируемость двойного числового ряда совпадает с его абсолютной сходимостью.

Если ряд $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ $|C, \alpha, \beta|$-суммируем, то, как легко показать на основании (1), (2), (3), он (C, α, β)-суммируем и, кроме того, последовательность $\sigma_{mn}^{\alpha\beta}$ равномерно ограничена. Последнее дает основание ожидать, что теория $|C, \alpha, \beta|$-суммирования двойных числовых рядов будет во многих отношениях аналогична теории абсолютного чезаровского суммирования простых числовых рядов.

Теорема 1. *Если ряд* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ *суммируем* $|C, \alpha, \beta|$, $\alpha, \beta > -1$, *то он суммируем* $|C, \alpha + h, \beta + \eta|$, $h, \eta > 0$.

Обозначим через $\tau_{mn}^{\alpha\beta}$ (C, α, β)-средние последовательности $\{mna_{mh}\}$, τ_m^{β} — (C, α)-средние последовательности $\{ma_{m0}\}$, τ_n^{β} — (C, β)-средние последовательности $\{na_{0n}\}$. Так как при всех $m, n \geqslant 1$

$$\begin{gathered}\tau_{mn}^{\alpha\beta} = mn\,(\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{m,\,n-1}^{\alpha\beta} - \sigma_{m-1,\,n}^{\alpha\beta} + \sigma_{m-1,\,n-1}^{\alpha\beta}),\\ \tau_m^{\alpha} = m\,(\sigma_{m0}^{\alpha\beta} - \sigma_{m-1,0}^{\alpha\beta}), \quad \tau_n^{\beta} = n\,(\sigma_{0n}^{\alpha\beta} - \sigma_{0,\,n-1}^{\alpha\beta}),\end{gathered} \tag{4}$$

то теорема 1 эквивалентна утверждению, что ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{-1}\,\tau_{mn}^{\alpha+h,\,\beta+\eta}, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}\,\tau_m^{\alpha}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,\tau_n^{\beta}$$

сходятся абсолютно.

На основании определения чисел $\tau_{mn}^{\alpha\beta}$, A_p^{γ} имеем

$$\tau_{mn}^{\alpha+h,\,\beta+\eta} = (A_m^{\alpha+h}\,A_n^{\beta+\eta})^{-1}\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\mu=0}^{n} A_{m-\nu}^{h-1}\,A_{n-\mu}^{\eta-1}\,A_\nu^{\alpha}\,A_\mu^{\beta}\,\tau_{\nu\mu}^{\alpha\beta},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{-1}\,|\,\tau_{mn}^{\alpha+h,\,\beta+\eta}\,| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mnA_m^{\alpha+h}\;A_n^{\beta+\eta})^{-1}\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\mu=0}^{n} A_{m-\nu}^{h-1}\,A_{n-\mu}^{\eta-1}\,A_\nu^{\alpha}\;A_\mu^{\beta}\,|\,\tau_{\nu\mu}^{\alpha\beta}\,| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} |\,\tau_{\nu\mu}^{\alpha\beta}\,|\,A_\nu^{\alpha}\,A_\mu^{\beta}\sum_{m=\nu}^{\infty}\sum_{n=\mu}^{\infty} A_{m-\nu}^{h-1}\,A_{n-\mu}^{\eta-1}\,(mnA_m^{\alpha+h}\;A_n^{\beta+1})^{-1}.$$

Поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{-1}\,|\,\tau_{mn}^{\alpha+h,\,\beta+\eta}\,| \leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{-1}\,|\,\tau_{mn}^{\alpha\beta}\,| < \infty.$$

Абсолютная сходимость рядов $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}\,\tau_m^{\alpha+h}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,\tau_n^{\beta+\eta}$ доказывается аналогично.

Из теоремы 1, в частности, следует, что всякий абсолютно сходящийся двойной числовой ряд суммируем $|C, \alpha, \beta|$, $\alpha, \beta > 0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, выбрать ряды Σa_n и Σb_n такими, чтобы один из них был абсолютно сходящийся, а другой не абсолютно сходящийся, но $|C, \alpha|$-суммируемый, $\alpha > 0$, и рассмотреть двойной ряд $\Sigma\Sigma a_n b_n$.

С помощью соотношений (4) можно доказать также следующую теорему.

Теорема 2. *Если ряд* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ *суммируем* $|C, \alpha, \beta|$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, *то ряд* $\Sigma\Sigma (A_m^{\alpha} A_n^{\beta})^{-1} a_{mn}$ *сходится абсолютно.*

Укажем теперь некоторые результаты, касающиеся $|C, \alpha, \beta|$-суммируемости двойных тригонометрических рядов, которые, как известно, имеют следующий вид:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} (a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \cos ny + c_{mn} \cos mx \sin ny + $$
$$+ d_{mn} \sin mx \sin ny) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} A_{mn}(x, y), \tag{5}$$

где $\lambda_{00} = {}^1/_4$, $\lambda_{m0} = \lambda_{0n} = {}^1/_2$, $\lambda_{mn} = 1$, $m, n > 0$. Положим $\rho_{mn}^2 = a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2$.

Теорема 3. *Если числа* ρ_{mn} *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{mn}^2 [\log(m+1)]^{\varepsilon_1} [\log(n+1)]^{\varepsilon_2} < \infty, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 1; \tag{6}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_{m0}^2 [\log(m+1)]^{\varepsilon_3} < \infty, \quad \varepsilon_3 > 1; \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{0n}^2 [\log(n+1)]^{\varepsilon_4} < \infty, \quad \varepsilon_4 > 1, \tag{8}$$

то ряд (5) *суммируем* $|C, \alpha, \beta|$, $\alpha, \beta > {}^1/_2$, *почти всюду.*

Для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{-1} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tau_{mn}^{\alpha\beta}(x, y)|\, dx\, dy < \infty, \tag{9}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \int_0^{2\pi} |\tau_m^{\alpha}(x)|\, dx < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \int_0^{2\pi} |\tau_n^{\beta}(y)|\, dy, \quad \alpha, \beta > \frac{1}{2} \tag{10}$$

где $\tau_{mn}^{\alpha\beta}(x, y)$ — (C, α, β)-средние последовательности $\{mnA_{mn}(x, y)\}$, $\tau_m^{\alpha}(x)$ — (C, α)-средние последовательности $\{mnA_{mn}(x, y)\}$, $\tau_n^{\beta}(y)$ — (C, β)-средние последовательности $\{{}^1/_2\, nA_{0n}(x, y)\}$.

В силу (7), (8) соотношения (10) выполняются на основании одной теоремы Уонга [2].

Применяя неравенство Буняковского — Шварца для двойных интегралов, получаем

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tau_{mn}^{\alpha\beta}(x, y)|\, dx\, dy \leqslant C_1 (A_m^{\alpha} A_n^{\beta})^{-1} \left\{ \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n} (A_{m-\nu}^{\alpha-1} A_{n-\mu}^{\beta-1})^2 \nu^2 \mu^2 \rho_{\nu\mu}^2 \right\}^{1/2}.$$

Ввиду (9) неравенство Буняковского — Шварца для двойных сумм дает

$$\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}(mnA_m^{\alpha}A_n^{\beta})^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n}(A_{m-\nu}^{\alpha-1}A_{n-\mu}^{\beta-1})^2\nu^2\rho_{\nu\mu}^2\right\}^{1/2}\leqslant\left\{\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}(ml_m^{\varepsilon_1}nl_n^{\varepsilon_2})^{-1}\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}\frac{l_m^{\varepsilon_1}l_n^{\varepsilon_2}}{mn(A_m^{\alpha}A_n^{\beta})^2}\sum_{m=\nu}^{n}\sum_{n=\mu}^{q}(A_{m-\nu}^{\alpha-1}A_{n-\mu}^{\beta-1})^2\nu^2\mu^2\rho_{\nu\mu}^2\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\left\{\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{q}\rho_{\nu\mu}^2\nu^2\mu^2\sum_{m=\nu}^{p}\sum_{n=\mu}^{q}(A_{m-\nu}^{\alpha-1}A_{n-\mu}^{\beta-1})^2\frac{l_m^{\varepsilon_1}l_n^{\varepsilon_2}}{m(A_m^{\alpha})^2n(A_n^{\beta})^2}\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\left\{\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{q}\rho_{\nu\mu}^2\nu^2\mu^2\sum_{m=\nu}^{\infty}(A_{m-\nu}^{\alpha-1})^2\frac{l_m^{\varepsilon_1}}{m(A_m^{\alpha})^2}\cdot\sum_{n=\mu}^{\infty}(A_{n-\mu}^{\beta-1})^2\frac{l_n^{\varepsilon_2}}{n(A_n^{\beta})^2}\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant C_3\left\{\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{q}\rho_{\nu\mu}^2[\log(m+1)]^{\varepsilon_1}[\log(n+1]^{\varepsilon_2}\right\}^{1/2}<C_4,$$

где $l_k^{\varepsilon}=[\log(k+1)]^{\varepsilon}$, C_1, C_2, C_3, C_4 — константы.

Можно показать, что в условиях теоремы 3 ни одно из ε_i нельзя заменить единицей.

Сталинградский педагогический институт
им. А. С. Серафимовича

Поступило
17 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ф. Тиман, ДАН, **60**, № 7 (1948). [2] T. Wang, Duke Math. Journ., **9**, 803 (1942).