Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Академик И. М. ВИНОГРАДОВ

НОВОЕ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА ОЦЕНКИ ДВОЙНЫХ СУММ

В одной из моих работ (1) был указан общий способ улучшения оценок, получаемых моим методом 1934—1937 гг., путем присоединения к этому методу особого способа исчерпывания области суммирования соответствующих двойных сумм прямоугольными областями все меньшей и меньшей площади. Здесь я хочу показать, что введение, наряду с указанным способом, надлежащим образом подобранных дополнительных суммирований может привести к оценкам еще более точным. В качестве примера, поясняющего сказанное, я рассмотрю сумму

$$\sum_{p \leqslant N} \chi(p+k),$$

где $\chi(x)$ — неглавный характер по простому достаточно большому модулю q и k — целое, которое для простоты изложения считаем положительным или отрицательным постоянным. В дальнейшем символы $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ будут обозначать произвольно малые положительные постоянные, обозначение $A \ll B$ при положительном B будет показывать, что $|A| B^{-1}$ не превосходит некоторого постоянного, символ x' будет обозначать число, удовлетворяющее сравнению $xx' \equiv 1 \pmod q$.

Лемма 1. *Пусть X и U — числа с условиями $q^{\varepsilon_0} \ll X \leqslant U < q$, η_0 — целое число с условием $0 < \eta_0 < q$, наконец, пусть $\lambda(u)$ обозначает число решений сравнения $kx' + \eta \equiv u \pmod q$ при условии, что x и η независимо друг от друга пробегают целые числа интервалов $U - X < x \leqslant U$; $0 < \eta \leqslant \eta_0$. Тогда имеем*

$$\sum_{u=0}^{q-1} (\lambda(u))^2 \ll \frac{\eta_0^3 UX}{q} q^{\varepsilon} + X\eta_0 + \eta_0^2 q^{\varepsilon}.$$

Чтобы доказать эту лемму, следует исходить из того факта, что левая часть последнего неравенства есть число решений сравнения $k(x' - x'_1) + \eta - \eta_1 \equiv 0 \pmod q$, где x_1 пробегает те же значения, что и x, а η_1 пробегает те же значения, что и η.

Лемма 2. *Пусть $1 \leqslant U < q$, $qU \ll N^2$,*

$$S = \sum_{xy \leqslant N}\sum \psi(x) \chi(xy+k),$$

где x пробегает все целые положительные числа, не превосходящие U, а y пробегает некоторый ряд последовательных целых, положительных чисел, меньших q, причем $\psi(x)$ удовлетворяет условию $0 \leqslant \psi(x) \ll q^{\varepsilon_1}$. Тогда имеем

$$S \ll Nq^{\varepsilon}\left(\frac{qU}{N^2}\right)^{1/4} + Nq^{\varepsilon}\left(\frac{q}{NU}\right)^{1/8}.$$

Чтобы доказать эту лемму, достаточно при U_1, V_1, X_0, Y_0, удовлетворяющих условиям $q^{\varepsilon_0} \ll 2X_0 \leqslant U_1 \leqslant U$, $1 \leqslant Y_0 \leqslant V_1 < q$, $U_1 V_1 \leqslant N$, оценить сумму

$$S_1 = \sum_x \sum_y \psi(x) \chi(xy + k),$$

где x и y пробегают все целые числа с условиями $U_1 - X_0 < x \leqslant U_1$, $V_1 - Y_0 < y \leqslant V_1$. Пусть $\eta_1 = [q^{1/2} U_1^{-1/2}]$. Находим

$$S_1 = \frac{1}{\eta_1} \sum_x \psi(x) \sum_y \sum_{\eta=1}^{\eta_1} \chi(x(y+\eta)+k) + O(X_0 \eta_1 q^{\varepsilon_1}) \ll$$

$$\ll \frac{q^{\varepsilon_1}}{\eta_1} \sum_x \sum_\eta \left| \sum_y \chi(y + \eta + kx') \right| + X_0 \eta_1 q^{\varepsilon_1} \ll$$

$$\ll \frac{q^{\varepsilon_1}}{\eta_1} \sum_{u=0}^{q-1} \lambda(u) \left| \sum_y \chi(u+y) \right| + X_0 \eta_1 q^{\varepsilon_1},$$

где $\lambda(u)$ есть число решений сравнения $kx' + \eta \equiv u \pmod q$. Отсюда следует

$$S_1^2 \ll \frac{q^{2\varepsilon_1}}{\eta_1^2} \sum_{u=0}^{q-1} (\lambda(u))^2 \sum_{u=0}^{q-1} \sum_y \sum_{y_1} \chi(u+y) \bar{\chi}(u+y_1) + X_0^2 \eta_1^2 q^{2\varepsilon_1},$$

где $\bar{\chi}(x)$ обозначает характер, сопряженный с $\chi(x)$, и y_1 пробегает те же значения, что и y. Поэтому

$$S_1^2 \ll \frac{q^{2\varepsilon_1}}{\eta_1^2} (\eta_1^3 U_1 X_0 q^{\varepsilon_0 - 1} + X_0 \eta_1 + \eta_1^2 q^{\varepsilon_0}) q Y_0 + X_0^2 \eta_1^2 q^{2\varepsilon_1} \ll$$

$$\ll q^{\varepsilon} \left(\sqrt{qU_1}\, X_0 Y_0 + \frac{X_0^2 q}{U_1} + qY_0 \right), \quad S_1 \ll X_0 Y_0 q^{\varepsilon} \left(\left(\frac{qU_1}{X_0^2 Y_0^2} \right)^{1/4} + \left(\frac{q}{X_0^2 Y_0} \right)^{1/2} \right),$$

откуда, применяя способ исчерпывания к области суммирования суммы S, уже легко докажем лемму 2.

Лемма 3. *Пусть* $q^{2/3} \ll U \leqslant N$, $0{,}5\,U \leqslant U_0 < U$,

$$S = \sum_{xy \leqslant N} \sum \psi(x) \psi_1(y) \chi(xy + k),$$

где x пробегает целые числа с условием $U_0 < x \leqslant U$, а y пробегает все целые положительные числа, причем $\psi(x)$ и $\psi_1(y)$ удовлетворяют условиям $0 \leqslant \psi(x) \ll q^{\varepsilon_1}$, $0 \leqslant \psi_1(y) \ll q^{\varepsilon_2}$. Тогда имеем

$$S \ll Nq^{\varepsilon} \left(\frac{q^{2/3}}{U} + \frac{U}{N} + \frac{1}{q} \right)^{1/2}.$$

Эта лемма есть следствие известной оценки ([2])

$$\left| \sum_{x=x_1}^{x_2} \chi(ax^2 + bx + c) \right| \ll q^{1/2} \ln q, \qquad (1)$$

где x_1, x_2, a, b, c — целые числа, причем $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant q$ и числа a и $b^2 - 4ac$ не делятся на q.

Теорема. *При* $q^{5/6} \ll N \ll q^{7/6}$ *имеем*

$$\sum_{p \leqslant N} \chi(p + k) \ll Nq^{\varepsilon} \left(\frac{q^{5/6}}{N} \right)^{1/4}.$$

Эта теорема доказывается применением моего метода 1934—1937 гг. и лемм 2 и 3. В соединении с моим прежним результатом [1]

$$\sum_{p\leqslant N}\chi(p+k)\ll N^{1+\varepsilon'}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+N^{-\frac{1}{6}}\right),$$

нетривиальным при $N\gg q^{1+\varepsilon''}$, теорема дает возможность нетривиально оценивать сумму $\sum\limits_{p\leqslant N}\chi(p+k)$ уже при $N\gg q^{5/6+\varepsilon''}$. Это является важным сдвигом в решении рассматриваемого вопроса. Следует заметить, что если бы в правой части неравенства (1) вместо $q^{2/3}\ln q$ стояло $q^{1/3+\varepsilon'''}$ (гипотеза, что такая замена верна, весьма правдоподобна), то в правой части неравенства нашей теоремы вместо $q^{5/6}$ можно было бы поставить $q^{3/4}$.

Далее отмечу, что способ исчерпывания области суммирования двойной суммы, надлежащим образом видоизменяемый, может служить источником элементарных, а часто и чисто арифметических подходов к решению самых разнообразных вопросов теории чисел. В качестве примера я приведу новые выводы оценок сумм [3]

$$S=\sum_{x=N+1}^{N+Q}\chi(x),\qquad S_r=\sum_{x=N+1}^{N+Q}\sigma_r(x),$$

где N и Q — целые, $\sqrt{q}<Q<q/2$ и, считая n делителем числа $q-1$ с условием $1<n\leqslant q-1$ и полагая $\nu=1/n$, определим $\sigma_r(x)$ при x, делящемся на q, равенством $\sigma_r(x)=0$, а при x, не делящемся на q, равенством $\sigma_r(x)=1-\nu$ или равенством $\sigma_r(x)=-\nu$ в зависимости от того, делится $\operatorname{ind}x-r$ на n или не делится.

Имея целью дать оценку суммы S, заметим, что при целых M и P с условием $0<P<q/2$ сумму

$$U_{M,P}=\sum_{x=M+1}^{M+P}\sum_{z=0}^{P-1}\chi(x+z)$$

можно рассматривать как сумму значений $\chi(x)$, распространенную на целые точки (x,y) области параллелограмма с вершинами $(M,0)$, $(M+P,0)$, $(M+P,P)$, $(M+2P,P)$, причем стороны, соединяющие первую вершину со второй и третьей, к области не причисляются. При этом, заставляя M пробегать какие-либо m значений $M_1,\ldots,M_m$ с условием $M_1+P\leqslant M_2,\ldots,M_{m-1}+P\leqslant M_m\leqslant M_1+q$, легко установим неравенство

$$\sum_M|U_{M,P}|<P\sqrt{mq}. \tag{2}$$

Положим

$$Q=h\sqrt{q},\quad \tau=\left[\frac{\ln h}{\ln 3}\right],\quad Q_0=2\cdot 3^{\tau}\left[\frac{Q}{2\cdot 3^{\tau}}\right],\quad S_0=\sum_{x=N+1}^{N+Q_0}\chi(x),$$

причем сначала будем считать, что $h\geqslant 3$ (следовательно, $\tau\geqslant 1$). Произведение S_0Q_0 можно рассматривать как сумму значений $\chi(x)$, распространенную на целые точки (x,y) области прямоугольника с вершинами $(N,0)$, $(N+Q_0,0)$, (N,Q_0), $(N+Q_0,Q_0)$, причем стороны, соединяющие первую вершину со второй и третьей, к области не причисляются. К этой области применим способ исчерпывания согласно схеме, указанной на рис. 1, при помощи параллелограммов с длинами сторон $Q_0, \frac{Q_0}{3}, \dots, \frac{Q_0}{3^\tau}$ (значения χ для одних параллелограммов берутся со знаком $+$, для других параллелограммов берутся со знаком $-$). Очевидно, имеется один параллелограмм с длиною стороны Q_0 и при $s > 0$ имеется $4 \cdot 3^{s-1}$ параллелограммов с длиною стороны $Q_0 3^{-s}$.

Применяя неравенство (2), найдем

$$|S_0 Q_0| < \left(Q_0\sqrt{q} + \frac{Q_0}{3}\sqrt{4q} + 3\frac{Q_0}{3^2}\sqrt{4q} + \dots + 3^{\tau-1}\frac{Q_0}{3^\tau}\sqrt{4q}\right) + \frac{Q_0}{2\cdot 3^\tau},$$

$$|S| < \sqrt{q}\left(1 + \frac{2}{3}\tau + \frac{Q_0}{2\cdot 3^\tau\sqrt{q}} + \frac{2\cdot 3^\tau}{\sqrt{q}}\right) \leqslant q\left(\frac{2\ln h}{\ln 27} + 2{,}5\right).$$

Итак (случай $1 \leqslant h < 3$ рассматривается тривиально), при $\sqrt{q} < Q < q/2$ имеет место неравенство

$$|S| < \sqrt{q}\left(\frac{2\ln h}{\ln 27} + 2{,}5\right).$$

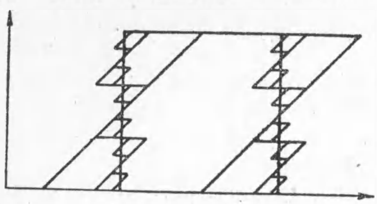

Рис. 1

Оценку суммы S_r можно было бы получить, воспользовавшись только что доказанным неравенством. Однако преимущество имеет прямой чисто арифметический путь. Применяя обозначения $P, M_1, \dots, M_m$ предыдущего доказательства и полагая

$$U_{r,M,P} = \sum_{x=M+1}^{M+P} \sum_{z=0}^{P-1} \sigma_r(x+z),$$

находим

$$\left(\sum_M |U_{r,M,P}|\right)^2 \leqslant mP \sum_{x=0}^{q-1}\left(\sum_{z=0}^{P-1}\sigma_r(x+z)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant mP \sum_{x=0}^{q-1}\sum_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{z=0}^{P-1}\sigma_s(x+z)\right)^2 = mP \sum_{z=0}^{P-1}\sum_{z_1=0}^{P-1}\sum_{x=0}^{q-1}\sum_{s=0}^{n-1}\sigma_s(x+z)\,\sigma_s(x+z_1).$$

Простой арифметический подсчет показывает, что суммирование по x и s при данных z и z_1 дает $(q-1)(1-\nu)$ или $-1+\nu$ в зависимости от того, будут z и z_1 равны между собою или нет. Поэтому

$$\left(\sum_M |U_{r,M,P}|\right)^2 \leqslant mP(q-P)(1-\nu), \quad \sum_M |U_{s,M,P}| < P\sqrt{mq}.$$

Применяя далее те же рассуждения, как и в предыдущем доказательстве, убедимся, что при $\sqrt{q} < Q < q/2$ имеет место неравенство

$$|S_r| < \sqrt{q}\left(\frac{2\ln h}{\ln 27} + 2{,}5\right).$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило
10 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Виноградов, Изв. АН СССР, сер. матем., 7, 17 (1943). [2] H. Davenport, Journ. f. reine u. angew. Mathem., **1699**, H. 3, 158 (1933). [3] И. М. Виноградов, Изв. АН СССР, **19**, № 16—17, 785 (1925).