Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СОБОЛЕВА ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА *

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 V 1950)

Рассматривается уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, а ω — вещественная постоянная.

В рассматриваемой области G трехмерного пространства переменные x и y изменяются в ограниченной области D плоскости XY, а $t > 0$. Границу Γ области D мы предполагаем простой замкнутой кривой, непрерывная кривизна которой всюду превышает положительную постоянную.

Задача (С) для уравнения (1) состоит в отыскании такого решения уравнения (1) в области G, которое удовлетворяет следующим граничным и начальным условиям:

$$u|_\Gamma = 0 \quad \text{при всех } t \geqslant 0; \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \psi_0(x, y); \quad \partial u/\partial t|_{t=0} = \psi_1(x, y). \tag{3}$$

Всюду в дальнейшем, если A — множество, то $\overline{A}$ обозначает замыкание, если же A — число или функция, то $\overline{A}$ обозначает величину, комплексно сопряженную.

Пусть Φ — совокупность достаточно гладких функций $\varphi(x, y)$, определенных в области D и исчезающих вне некоторой подобласти $D_\varphi \subset \overline{D}_\varphi \subset D$ (подобласти D_φ для различных $\varphi(x, y)$ могут быть различными). Пусть, далее, H_A — пространство Гильберта, состоящее из вектор-функций $\mathbf{V}(x, y)$, определенных в области D, комплексные компоненты которых $V_x(x, y)$ и $V_y(x, y)$ удовлетворяют условиям:

$$\iint\limits_D [|V_x|^2 + |V_y|^2]\, dx\, dy < +\infty, \tag{4,1}$$

$$\iint\limits_D \left[V_x \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y}\right] dx\, dy = 0 \quad \text{при всех } \varphi(x, y) \in \Phi. \tag{4,2}$$

Скалярное произведение определено следующим образом:

$$(\mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(2)}) = \iint\limits_D [V_x^{(1)} \overline{V_x^{(2)}} + V_y^{(1)} \overline{V_y^{(2)}}]\, dx\, dy,$$

* Рассматриваемые нами вопросы возникли в связи с задачей, предложенной в 1945 г. С. Л. Соболевым на заседании Московского математического общества. При доказательстве результатов этой заметки мы пользуемся приемами, во многом аналогичными тем, которые ранее были предложены С. Л. Соболевым.

а линейные операции определены как обычные линейные операции над вектор-функциями. Легко доказывается, что определенное таким образом пространство H_A полно и сепарабельно. Очевидно, для гладких векторов $\mathbf{V}(x,y)$ условие (4,2) интегрированием по частям приводится к условию $\operatorname{div}\mathbf{V}=0$.

Линейное многообразие векторов $\mathbf{V}(x,y)\in H_A$, компоненты которых суть полиномы от x и y, назовем линейным многообразием полиномиальных векторов и обозначим через Ω.

Лемма. *Линейное многообразие полиномиальных векторов всюду плотно в пространстве H_A в смысле метрики этого пространства.*

Доказательство основывается на рассмотрении функции:

$$S^{(h)}(x,y)=\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} V_y^{(h)}dx-V_x^{(h)}dy,$$

где $\mathbf{V}^{(h)}(x,y)$ — усреднение $\mathbf{V}(x,y)\in H_A$ с радиусом усреднения h, которое при $h\to 0$ стремится к $\mathbf{V}(x,y)$ по метрике пространства H_A и обладает производными всех порядков ([1]).

Доказывается, что $S^{(h)}(x,y)$ не зависит от пути интегрирования. Наконец, в силу известной теоремы ([2]) о том, что для всякой гладкой функции можно найти такую равномерно сходящуюся к ней последовательность полиномов, чтобы частные производные от полиномов равномерно сходились соответственно к частным производным этой функции, легко убеждаемся в справедливости леммы.

Теперь рассмотрим систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2}=-\omega^2 V_x+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2 V_y}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y},\tag{5}$$

где V_x и V_y — компоненты некоторой два раза дифференцируемой по t * траектории $\mathbf{V}(x,y,t)$ в пространстве H_A, а $P(x,y,t)$ — скалярная функция, удовлетворяющая условию (2).

Пусть $\mathbf{V}\in\Omega\subset H_A$, тогда из (5) следует:

$$\Delta P=\rho\omega^2\partial V_x/\partial x\tag{6}$$

и, следовательно, функция P, в силу условия (2), при заданном $\mathbf{V}\in\Omega$ определяется однозначно. Таким образом с помощью системы (5) определен оператор A с областью определения Ω, причем при заданном $\mathbf{V}\in\Omega$ компоненты $A\mathbf{V}$ задаются правыми частями (5), где за функцию P следует брать решение уравнения (6) при условии (2). Очевидно, оператор A дистрибутивен.

Теорема 1. *Оператор A с областью определения Ω является эрмитовым, т. е. для всякой пары $\mathbf{V}^{(1)}\in\Omega$ и $\mathbf{V}^{(2)}\in\Omega$*

$$(A\mathbf{V}^{(1)},\ \mathbf{V}^{(2)})=(\mathbf{V}^{(1)},A\mathbf{V}^{(2)}).\tag{7}$$

Доказательство. Имеем:

$$(A\mathbf{V}^{(1)},\mathbf{V}^{(2)})-(\mathbf{V}^{(1)}),A\mathbf{V}^{(2)})=$$

$$=\frac{1}{\rho}\iint\limits_D\Big[\overline{\mathbf{V}_x^{(2)}}\,\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x}+\overline{\mathbf{V}_y^{(2)}}\,\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y}\Big]\,dx\,dy-\frac{1}{\rho}\iint\limits_D\Big[V_x^{(1)}\,\overline{\frac{\partial P^{(2)}}{\partial x}}+\mathbf{V}_y^{(1)}\,\overline{\frac{\partial P^{(2)}}{\partial y}}\Big]dxdy;$$

---

* Производная по t траектории $\mathbf{V}(x,y,t)\in H_A$ определяется соотношением: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}-\frac{\mathbf{V}(x,y,t+\Delta t)-\mathbf{V}(x,y,t)}{\Delta t}\right\|=0.$

интегрируя по частям, получим

$$(A\mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(2)}) - (\mathbf{V}^{(1)}), A\mathbf{V}^{(2)}) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\int\limits_{\Gamma}[P^{(1)}\overline{\mathbf{V}_n^{(2)}} - \overline{P^{(2)}}\,\mathbf{V}_n^{(1)}]\,ds + \frac{1}{\rho}\iint\limits_{D}[\overline{P^{(2)}}\operatorname{div}\mathbf{V}^{(1)} - P^{(1)}\operatorname{div}\overline{\mathbf{V}^{(2)}}]\,dx\,dy,$$

а принимая во внимание (2) и (4,2), получим (7).

Теорема 2. *Оператор A ограничен на линейном многообразии Ω, т. е. для всех $\mathbf{V}\in\Omega$*

$$\|A\mathbf{V}\| \leqslant \omega^2\,\|\mathbf{V}\|^{*}. \tag{8}$$

Доказательство. По определению

$$\|A\mathbf{V}\|^2 = (A\mathbf{V}, A\mathbf{V}) =$$

$$= -\omega^2\iint\limits_{D} V_x\,\overline{(A\mathbf{V})}_x dx\,dy + \frac{1}{\rho}\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\,\overline{(A\mathbf{V})}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\overline{(A\mathbf{V})}_y\right]dx\,dy. \tag{9}$$

Интегрируя второй интеграл по частям, получим:

$$\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\,\overline{(A\mathbf{V})}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\overline{(A\mathbf{V})}_y\right]dx\,dy = \int\limits_{\Gamma}P\overline{(A\mathbf{V})}_n ds - \iint\limits_{D}P\operatorname{div}\overline{(A\mathbf{V})}\,dx\,dy,$$

а на основании (2) и (4,2) легко убеждаемся, что (9) можно переписать в виде:

$$\|A\mathbf{V}\|^2 = -\omega^2\iint\limits_{D}V_x\overline{(A\mathbf{V})}_x\,dx\,dy. \tag{10}$$

Применение неравенства Буняковского к (10) доказывает теорему 2.

Лемма и теорема 2 позволяют по непрерывности расширить эрмитов оператор A до самосопряженного единственным образом. Расширенный оператор мы снова обозначим через A. Легко доказать, что границы оператора A суть $-\omega^2$ и 0, т. е. $\inf(A\mathbf{V}, \mathbf{V}) = -\omega^2$, $\sup(A\mathbf{V}, \mathbf{V}) = 0$, где указанные точные грани следует брать по всевозможным $\mathbf{V}\in H_A$ при условии $\|\mathbf{V}\| = 1$. Отсюда следует [3], что спектр оператора A является замкнутым множеством, лежащим на отрезке $[-\omega^2, 0]$ вещественной оси.

Теорема 3. *Для всякой области D, удовлетворяющей указанным выше условиям, числа $\nu_a = -\omega^2$, $\nu_b = 0$ являются собственными значениями оператора A, причем соответствующие им собственные подпространства H_a и H_b бесконечно мерны.*

Теорема 4 (эквивалентности). *Если гладкие вектор $\mathbf{V}(x, y, t)\in H_A$ и функция P удовлетворяют системе* (5) *при условии* (2), *то функция P удовлетворяет уравнению* (1) *и при заданном* $\mathbf{V}$ *определяется однозначно. Обратно, каждому гладкому решению P уравнения* (1) *при условии* (2) *соответствует вектор $\mathbf{V}\in H_A$, который вместе с P удовлетворяет системе* (5). *Этот вектор $\mathbf{V}\in H_A$ определяется при заданной функции P с точностью до элементов, принадлежащих ортогональной сумме собственных подпространств $H_a\oplus H_b$.*

---

* $\sqrt{(\mathbf{V}, \overline{\mathbf{V}})} = \|\mathbf{V}\| \geqslant 0$ называется нормой элемента $\mathbf{V}\in H_A$.

Очевидно, система (5) представима в виде:

$$\partial^2\mathbf{V}/\partial t^2 = A\mathbf{V}. \tag{11}$$

Задача (C) для уравнения (11) состоит в отыскании такой два раза дифференцируемой по t траектории $\mathbf{V}(x, y, t) \in H_A$, которая удовлетворяет уравнению (11) и начальным условиям:

$$\mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{V}^{(0)}(x, y), \quad \partial\mathbf{V}/\partial t|_{t=0} = \mathbf{V}^{(1)}(x, y). \tag{12}$$

Теорема 5. *При произвольных начальных данных* $\mathbf{V}^{(0)}(x, y)$ *и* $\mathbf{V}^{(1)}(x, y)$, *принадлежащих пространству Гильберта* H_A, *решение задачи* (C) *для уравнения* (11) *существует и единственно в указанном классе траекторий пространства* H_A. *Эта задача поставлена корректно в смысле сходимости по норме пространства* H_A.

Доказательство. Будем искать решение задачи в виде степенного ряда

$$\mathbf{V}(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{\partial^k \mathbf{V}}{\partial t^k}\bigg|_{t=0}, \tag{13}$$

который, как легко видеть, в силу (12) можно переписать в виде

$$\mathbf{V}(x, y, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} A^p \mathbf{V}^{(0)}(x, y) + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} A^p \mathbf{V}^{(1)}(x, y),$$

где под нулевой степенью оператора A следует понимать тождественный оператор. В силу ограниченности оператора A легко получаем оценку:

$$\|\mathbf{V}(x, y, t)\| \leqslant \|\mathbf{V}^{(0)}(x, y)\| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|\omega t|^{2p}}{(2p)!} + \frac{\|\mathbf{V}^{(1)}(x, y)\|}{|\omega|} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|\omega t|^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

или

$$\|\mathbf{V}(x, y, t)\| \leqslant \frac{e^{|\omega t|}}{|\omega|} (|\omega| \, \|\mathbf{V}^{(0)}\| + \|\mathbf{V}^{(1)}\|). \tag{14}$$

Из неравенства (14) легко следует справедливость теоремы 5.

Пользуясь теоремой 5, можно доказать аналогичный результат относительно задачи (C) для уравнения (1), а именно:

Теорема 6. *Если начальные данные* $\psi_0(x, y)$ *и* $\psi_1(x, y)$ *суть произвольные функции, непрерывные в* $D + \Gamma$, *обладающие кусочно-непрерывными частными производными третьего порядка* * *в* D *и удовлетворяющие условию* (2), *то решение задачи* (C) *для уравнения* (1) *существует и единственно в классе два раза непрерывно дифференцируемых функций. Далее, если*:

$$\iint_D (|\Delta\psi_0|^2 + |\Delta\psi_1|^2)\, dx\, dy \leqslant \varepsilon,$$

то при каждом фиксированном $t > 0$ *интеграл Дирихле от решения, взятой по области* D, *будет мал вместе с* ε.

Институт математики и механики
Академии наук Арм.ССР

Поступило
3 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Тр. физ.-мат. ин-та им. Стеклова, **9** (1935). [2] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, **1**, 1933. [3] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, **5**, 1947.

* Соответствующим образом обобщая класс рассматриваемых решений, можно избавиться от требований дифференцируемости, заменяя их требованием ограниченности норм в соответствующих пространствах Гильберта.