Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 1

ФИЗИКА

А. И. АХИЕЗЕР, Г. Л. ЛЮБАРСКИЙ и Я. Б. ФАЙНБЕРГ

ОБ ЭФФЕКТЕ ЧЕРЕНКОВА и СЛОЖНОМ ЭФФЕКТЕ ДОППЛЕРА

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 2 V 1950)

Существует ряд сложных волноводов, в которых без применения диэлектриков, специальным расположением металлических перегородок созданы такие условия, при которых фазовая скорость распространения волн меньше скорости света в вакууме. При равномерном движении вдоль такой системы заряженной частицы, скорость которой превосходит фазовую скорость распространения волн, так же как и при движении заряженной частицы в диэлектрике, возникает излучение электромагнитных волн (эффект Черенкова).

Это излучение может быть просто определено в случае линейных периодических структур, представляющих собой совокупность одинаковых ячеек, связанных друг с другом отверстиями, через которые движется заряженная частица.

Будем искать поперечную часть векторного потенциала $\mathbf{A}$ в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{\lambda} q_{\lambda}(t)\, \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{r})\, e^{i\omega_{\lambda} t}$ представляет собой различные волны, могущие распространяться в периодической структуре в отсутствие заряда ($\lambda \equiv \varkappa, s$ — совокупность непрерывного ($\varkappa$) и дискретных (s) параметров, характеризующих волну), q_{λ} — некоторые функции времени. Пространственная функция $\mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{r})$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{r}) = e^{i\varkappa x}\, \mathbf{a}_{\lambda}(\mathbf{r}), \qquad -\frac{\pi}{l} \leqslant \varkappa \leqslant \frac{\pi}{l},$$

где $\mathbf{a}_{\lambda}$ — периодическая функция координаты x (вдоль которой расположены ячейки), нормированная согласно условию

$$\int\limits_{V_1} |\mathbf{a}_{\lambda}|^2\, dv = 4\pi c^2$$

(V_1 — объем одной ячейки), l — период структуры.

Функция $q_{\lambda}(t)$ удовлетворяет уравнению осциллятора частоты ω_{λ}, находящегося под действием вынуждающей силы:

$$\ddot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} = f_{\lambda}(t), \tag{1}$$

где

$$f_{\lambda} = \frac{1}{CN} \int\limits_{V_N} \mathbf{j}\mathbf{A}_{\lambda}^{*}\, dv$$

($\mathbf{j}$ — плотность тока, связанного с частицей, N — общее число ячеек, V_N — их объем).

Энергия электромагнитного поля равна

$$H(t) = \frac{N}{2} \sum_{\lambda} \left(\dot{q}_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda}^2 \right).$$

Если происходит излучение, то при $t \to \infty$ H пропорционально t. Такое асимптотическое поведение имеет место только при резонансе между собственными колебаниями осцилляторов q_{λ} и силой $f_{\lambda}(t)$ [1–3].

При равномерном движении заряда e со скоростью v вдоль оси x-в

$$j_x = ev\delta(x - vt), \quad j_y = j_z = 0,$$

и уравнение (1) приобретает вид:

$$\ddot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} = \frac{ev}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{\lambda}^{(n)*} e^{-i\left(\varkappa + \frac{2\pi n}{l}\right)}, \tag{2}$$

где

$$b_{\lambda}^{(n)} = \frac{1}{l} \int_0^l \mathbf{e}\, \mathbf{a}_{\lambda}(x, 0, 0)\, e^{-\frac{2\pi i n x}{l}} dx$$

($\mathbf{e}$ — единичный вектор поляризации).

Сила характеризуется спектром частот $\Omega_{\varkappa n} = \left(\varkappa + \frac{2\pi n}{l}\right) v$.

Условие резонанса, являющееся условием излучения, имеет вид

$$\omega_{\lambda} = \omega_{\varkappa s} = \Omega_{\varkappa n} = \left(\varkappa + \frac{2\pi n}{l}\right) v. \tag{3}$$

В неограниченном диэлектрике $\omega = kc / \sqrt{\varepsilon}$ (k — волновой вектор, ε — диэлектрическая постоянная), $\Omega_{\varkappa n} = kv \cos\theta$ (θ — угол между направлением распространения волны и скоростью частицы), $n = 0$ и (3) приводит к известному условию возможности черенковского излучения:

$$\cos\theta = \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon}} \leqslant 1.$$

В случае периодических структур условие (3) может выполняться, вообще говоря, при различных комбинациях величины s, n, $\varkappa$.

В обычном волноводе, заполненном диэлектриком, $\omega_{\lambda} = \sqrt{\omega_0^2 + u^2 \varkappa^2}$, где ω_0 — граничная частота и $u = c / \sqrt{\varepsilon}$. Условие черенковского излучения (3) приводит к соотношению $\omega_{\lambda} \equiv \sqrt{\omega_0^2 + u^2 \varkappa^2} = v\varkappa$, откуда следует, что излучаемая частота равняется

$$\omega_{\lambda} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}}}.$$

Это соотношение определяет дискретный спектр частот, так как u есть некоторая функция частоты.

Общая формула для интенсивности излучения имеет следующий вид:

$$I = \lim_{t \to \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{e^2 v^2 l}{4c^2} \left\{ \sum_{n, \lambda_j'} \frac{|b_{\lambda}^{(n)}|^2}{\left| \frac{d\omega_{\lambda}}{d\varkappa} - v \right|_{\lambda = \lambda_j'}} + \sum_{n, \lambda_j''} \frac{|b_{\lambda}^{(n)}|^2}{\left| \frac{d\omega_{\lambda}}{d\varkappa} + v \right|_{\lambda = \lambda_j''}} \right\}, \tag{4}$$

где λ'_j — совокупность величин $(\varkappa, s)$, удовлетворяющих уравнению $\omega_\lambda - \Omega_{\varkappa n} = 0$, а λ''_j — совокупность величин, удовлетворяющих уравнению $\omega_\lambda + \Omega_{\varkappa n} = 0$.

В случае цилиндрического волновода эта формула приводит к следующему результату:

$$I = \frac{2e^2 v}{R^2} \sum_s \frac{1}{J_1^2(\mu_s)}, \tag{5}$$

R — радиус волновода, J_1 — функция Бесселя, μ_s — корни функции Бесселя J_0; суммирование распространяется на те значения s, для которых $u(\omega_{\varkappa s}) \leqslant v$, причем излученные частоты $\omega_{\varkappa s}$ определяются из соотношения $\omega_{\varkappa s} \equiv u \sqrt{\varkappa^2 + \frac{\mu_s^2}{R^2}} = \varkappa v$ (с ростом s частота растет, а фазовая скорость $u(\omega_{\varkappa s})$ стремится к c; поэтому, начиная с некоторого s, условие $u < v$ перестает выполняться).

Если вдоль оси x-в движется со скоростью v осциллятор, собственные частоты и момент которого равны ω'_0 и d', то

$$j_x = \omega_0 d \cos \omega_0 t\, \delta(x - vt), \quad j_y = j_z = 0,$$

где $d = d' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, $\omega = \omega'_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Уравнение (1) приобретает вид

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \frac{\omega_0 d}{2c} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})\, e^{-i\varkappa vt} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_\lambda^{(n)*} e^{-2\pi i n \frac{vt}{l}}.$$

Условие излучения, т. е. условие резонанса, имеет теперь вид

$$\omega_\lambda = v\left(\varkappa + \frac{2\pi n}{l}\right) \pm \omega_0. \tag{6}$$

Это соотношение определяет эффект Допплера в периодических структурах. При заданных v, ω_0, s мы получим из (6) ряд дискретных значений $\varkappa$, которым соответствуют определенные дискретные частоты излучения.

При движении осциллятора в неограниченном диэлектрике условие (6) приобретает вид

$$\omega_\lambda \equiv \omega = \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon}} = kv \cos\theta \pm \omega_0,$$

откуда непосредственно следуют известные формулы [4] для сложного эффекта Допплера:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_0}{1 - \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)}\, v}{c} \cos\theta}, \qquad \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} v \cos\theta < 1; \\ \omega &= \frac{\omega_0}{\frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{c} v \cos\theta - 1}, \qquad \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c} v \cos\theta > 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Интенсивность излучения определяется следующей общей формулой:

$$I = \frac{\omega_0^2 d^2 l}{16c^2} \left\{ \sum_{n, \lambda'_j} \frac{|b_\lambda^{(n)}|^2}{\left| \frac{d\omega_\lambda}{d\varkappa} - v \right|_{\lambda=\lambda'_j}} + \sum_{n, \lambda''_j} \frac{|b_\lambda^{(n)}|^2}{\left| \frac{d\omega_\lambda}{d\varkappa} + v \right|_{\lambda=\lambda''_j}} \right\}, \tag{8}$$

где λ'_j — совокупность величин $(\varkappa, s)$, определяемых из уравнений $\omega_\lambda = v\left(\varkappa + \frac{2\pi n}{l}\right) \pm \omega_0$, а λ''_j — совокупность величин $(\varkappa, s)$, определяемых из уравнения $\omega_\lambda = -v\left(\varkappa + \frac{2\pi n}{l}\right) \pm \omega_0$.

Поступило
18 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, М., 1940. [2] В. Гинзбург, ДАН **56**, 699 (1947). [3] A. Bohr, Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd., **24**, 19 (1948). [4] И. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ., **6**, 2 (1942).