Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 8 IV 1950)

В данной работе, опираясь на формулы плоского напряженного состояния и на интегрирование вдоль кусочно-прямолинейных контуров, предложенные нами ранее ([1], [2]), впервые дается решение третьей основной задачи плоской теории упругости для произвольного выпуклого многоугольника, лежащего в конечной части плоскости.

Указанные выше формулы плоского напряженного состояния имеют вид ([1])

$$2\mu\left(\frac{dt}{ds}-i\frac{d\nu}{ds}\right)=k\varphi'(z)-\overline{\varphi}'(\overline{z})+[z\overline{\varphi}''(\overline{z})+\overline{\psi}'(\overline{z})]\,e^{-i2\alpha}, \tag{1}$$

$$2\mu\frac{dt}{ds}+N+i\left(-2\mu\frac{d\nu}{ds}+T\right)=(k+1)\,\varphi'(z)\quad\left(k=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right), \tag{2}$$

где s — длина дуги любого кусочно-прямолинейного контура Γ; α — угол, составленный с осью x нормалью к Γ, остающейся справа при движении вдоль Γ в сторону возрастания s; ν и t — нормальное и касательное смещения; N и T — нормальное и касательное напряжения; λ и μ — постоянные Ламэ; $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции Колосова — Гурса ([3]).

Пусть G есть многоугольник с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_m \neq \infty$, $m=1, 2, \ldots, n$) и внутренними углами при этих вершинах $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ ($0<\alpha_m<1$, $m=1, 2, \ldots, n$), лежащий в плоскости $z=x+iy$ так, что сторона A_nA_1 совпадает с интервалом вещественной оси, проходящим через точку $z=0$. Пусть L — граница многоугольника G, а σ — длина дуги L, отсчитываемая от точки $z=0$ в направлении положительного обхода L.

Пусть $\zeta=\rho e^{i\theta}=\zeta(z)$ есть функция, дающая конформное отображение многоугольника G на круг $|\zeta|<1$, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — точки границы γ круга $|\zeta|<1$, соответствующие точкам $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

В силу свойств конформных отображений, можем считать

$$z=A\int_{-i}^{\zeta}\prod_{m=1}^{n}(\zeta-a_m)^{-\mu_m}\,d\zeta\qquad\left(A=A_1\left[\int_{-i}^{1}\prod_{m=1}^{n}(\zeta-a_m)^{-\mu_m}\,\partial\zeta\right]^{-1}\right), \tag{3}$$

где $\mu_m=1-\alpha_m$ ($m=1, 2, \ldots, n$), $a_1=1$, $a_n=-1$.

Третью основную задачу плоской теории упругости для многоугольника G поставим следующим образом. Найти плоское напряженное состояние многоугольника G (а тем самым и показать его существование), допускающее непрерывность смещений во всех точках $G+L$, по следующему контурному условию:

$$\nu = \nu(\sigma), \quad T = T(\sigma) \text{ на } L, \tag{4}$$

где $\nu(\sigma)$ и $T(\sigma)$ — наперед заданные вещественные функции от σ, причем $T(\sigma)$ и $d\nu(\sigma)/d\sigma$ как функции от θ удовлетворяют условию H на каждой из закрытых дуг $[a_1 a_2]$, $[a_2, a_3], \ldots, [a_n a_1]$ *.

Будем искать решение поставленной задачи, предполагая, что функция $\varphi(z)$ непрерывна в $G+L$, а функции $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ непрерывны в $G+L$, за исключением быть может, точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, вблизи которых имеют место неравенства

$$|\varphi'(z)|, \quad |\psi(z)| < M|z - A_m|^{-\varepsilon} \quad (m = 1, 2, \ldots, n, \ M = \text{const}), \tag{5}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Из формулы (2) получаем

$$\varphi'(z) = \varphi_0'(z) + D, \tag{6}$$

где D — вещественная постоянная,

$$\varphi_0'(z) = \frac{i}{2\pi(k+1)} \int\limits_{\gamma} \left[-2\mu \frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma} + T(\sigma) \right] \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\, d\theta. \tag{7}$$

Обозначая через Δ_m скачок функции $\left[-2\mu \frac{d\nu(\sigma)}{d\sigma} + T(\sigma) \right]$ в точке A_m, видим, что $\varphi_0'(z)$ и $\varphi_0'^{+}(z)$ (знак $+$ обозначает предельные значения изнутри) вблизи каждой точки a_m представимы в виде

$$\varphi_0'(z) = \frac{\Delta_m}{\pi(k+1)} \ln \frac{1}{\zeta - a_m} + \Phi(\zeta), \tag{8}$$

$$\varphi_0'^{+}(z) = \frac{\Delta_m}{\pi(k+1)} \ln \frac{1}{t_1 - a_m} + \Phi^*(t_1), \tag{9}$$

где $\Phi(\zeta)$ — функция, непрерывная в точке $\zeta = a_m$; $\Phi^*(t_1)$ — функция от $t_1 = e^{i\theta}$, удовлетворяющая условию H на некоторых закрытых дугах, имеющих точку a_m своим концом.

Подставляя равенство (6) в формулу (1) и интегрируя обе части ее вдоль кусочно-прямолинейного контура Γ, выходящего из точки $z=0$ в направлении оси x, получаем

$$2\mu(\nu + it) = e^{-i\alpha}\left[k\varphi_0(z) - z\overline{\varphi_0'}(\overline{z}) - \overline{\psi}(\overline{z}) + (k-1)Dz\right], \tag{10}$$

где

$$\varphi_0(z) = \int\limits_0^z \varphi_0'(z)\, dz. \tag{11}$$

* Ясно, что эти условия легко выразить и в переменной σ, так как связь между σ и θ известна и дается равенством (3).

Из равенства (10) для определения функции $\psi(z)$ получаем следующую граничную задачу теории функций:

$$\operatorname{Re}[\psi(z)e^{i\alpha}]^{+} = c - \operatorname{Re}[z\overline{\varphi_0'}(\bar{z})e^{-i\alpha}]^{+} + (k-1)D\operatorname{Re}[ze^{-i\alpha}]^{+} \text{ на } \gamma, \tag{12}$$

где

$$c = -2\mu\nu(\sigma) + \operatorname{Re}[k\varphi_0(z)e^{-i\alpha}]^{+}. \tag{13}$$

Индекс ([4]) граничной задачи (12) равен -2. Каноническая функция $X(z)$ этой задачи будет (при $|\zeta|<1$)

$$X(z) = Be^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{\arg(-t_1^2 e^{-i2\alpha})\,dt_1}{t_1-\zeta},$$

где B — произвольная постоянная.

Подсчитывая $\Gamma(z)$ при соответствующем подборе постоянной B, получаем

$$X(z) = \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{A}\prod_{m=1}^{n}(\zeta - a_m)^{\mu_m}. \tag{14}$$

Условием существования решения граничной задачи (12) будет

$$\int_{\gamma}\{c - \operatorname{Re}[z\overline{\varphi_0'}(\bar{z})e^{-i\alpha}]^{+} + (k-1)D\operatorname{Re}[ze^{-i\alpha}]^{+}\}\,\frac{e^{-i\alpha}dt_1}{X^{+}(t_1)} = 0 \tag{15}$$

или

$$\int_{L}\{c - \operatorname{Re}[z\overline{\varphi_0'}(\bar{z})e^{-i\alpha}]^{+} + (k-1)D\operatorname{Re}[ze^{-i\alpha}]^{+}\}\,d\sigma.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_{L}\operatorname{Re}[ze^{-i\alpha}]^{+}d\sigma = \operatorname{Re}[e^{i\pi/2}\int_{L}z\,d\bar{z}] = 2S,$$

где S — площадь многоугольника G, имеем

$$D = \frac{1}{2S(k+1)}\int_{L}\{2\mu\nu(\sigma) - \operatorname{Re}[k\varphi_0(z)e^{-i\alpha}]^{+} + \operatorname{Re}[z\overline{\varphi_0'}(\bar{z})e^{-i\alpha}]^{+}\}\,d\sigma. \tag{16}$$

При постоянной D, определенной равенством (16), имеем единственное решение граничной задачи (12) в виде

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i}\prod_{m=1}^{n}(\zeta - a_m)^{\mu_m}\int_{\gamma}\frac{\{c - \operatorname{Re}[z\overline{\varphi_0'}(\bar{z})e^{-i\alpha}]^{+} + (k-1)D\operatorname{Re}[ze^{-i\alpha}]^{+}\}\,e^{-i\alpha}\,dt_1}{\prod_{m=1}^{n}(t_1-a_m)^{\mu_m}(t_1-\zeta)} \tag{17}$$

или в виде

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i}\frac{d\zeta}{dz}\int_{L}\{c - \operatorname{Re}[z\overline{\varphi_0'}(\bar{z})e^{-i\alpha}]^{+} + (k-1)D\operatorname{Re}[ze^{-i\alpha}]^{+}\}\,\frac{e^{-i\alpha}\,dz}{t_1-\zeta}. \tag{18}$$

Из равенств (17) и (18) видим, что функция $\psi(z)$ вблизи любой точки a_m представима в виде

$$\psi(z) = \Phi_1(\zeta) - \frac{1}{\pi i} \prod_{m=1}^{n} (\zeta - a_m)^{\mu_m} \int_{\gamma} \frac{\operatorname{Re}[\overline{A}_m \varphi_0'(z) e^{i\alpha}]^+ e^{-i\alpha} dt_1}{\prod\limits_{m=1}^{n} (t_1 - a_m)^{\mu_m} (t_1 - \zeta)}, \tag{19}$$

где $\Phi_1(\zeta)$ — функция, непрерывная в точке $\zeta = a_m$.

Граничная задача

$$\operatorname{Re}[F(z) e^{i\alpha}]^+ = \operatorname{Re}[\overline{A}_m \varphi_0'(z) e^{i\alpha}]^+ \text{ на } \gamma \tag{20}$$

в силу равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\left[\overline{A}_m \varphi_0'(z) \frac{dz}{dz^*}\right]^+ dz^* = 0, \tag{21}$$

где $z^* = z^*(z)$ — функция, конформно отображающая многоугольник G на верхнюю полуплоскость, имеет единственное решение. Следовательно, вычитаемое правой части равенства (19) есть не что иное как $\overline{A}_m \varphi_0'(z)$, и, значит, выражение $[\overline{z}\varphi_0'(z) + \psi(z)]$ есть функция, непрерывная в $G + L$. Таким образом, искомое напряженное состояние существует и единственно; для проекций смещений u, v на оси x, y и для N, T имеют место равенства

$$2\mu(u + iv) = k\varphi_0(z) - z\overline{\varphi_0'}(\overline{z}) - \overline{\psi}(\overline{z}) + (k-1) Dz, \tag{22}$$

$$N + iT = \varphi_0'(z) + \overline{\varphi_0'}(\overline{z}) + 2D - [\overline{z}\overline{\varphi_0''}(\overline{z}) + \overline{\psi}'(\overline{z})]\, \overline{e^{-i2\alpha}}, \tag{23}$$

где функции $\varphi_0'(z)$, $\varphi_0(z)$ и $\psi(z)$ определяются равенствами (7), (11) и (17), а постоянная D — равенством (16). Этим задача решена.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
8 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Н. Положий, ДАН, **66**, № 2 (1949). [2] Г. Н. Положий, Прикл. мат. и мех., **13** (1949). [3] С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, М., 1949, стр. 341. [4] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946, стр. 279.