Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. И. БЛОХ

ИЗГИБ НЕОГРАНИЧЕННОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 8 V 1950)

При приближенном расчете на прочность плоских железобетонных безбалочных перекрытий, плоских стенок паровых котлов, укрепленных анкерными болтами, и в других соответствующих случаях может возникнуть необходимость рассматривать задачу об изгибе неограниченной тонкой пластины, загруженной распределенной нагрузкой, изменяющейся по поверхности пластины по закону параллелограмма периодов. Эта задача для частного случая прямоугольника периодов рассматривалась рядом авторов (Б. Г. Галеркин, Л. С. Лейбензон, Д. Леве, С. А. Гершгорин, С. С. Голушкевич, А. С. Малиев, М. В. Николаева, Надаи, Войновский-Кригер и др.). Ниже приводим решение в рядах при использовании косоугольных координат для указанного общего случая двоякопериодической нагрузки.

Пусть в плоскости осей координат x и y, составляющих между собой угол α, расположена рассматриваемая упругая изотропная пластинка; координатная ось z направлена нормально к x и y.

Если через w обозначить малые смещения точек пластины в направлении отсчета координат z, через q — нагрузку в том же направлении, отнесенную к единице площади пластины, а цилиндрическую жесткость ее — через D, то для каждой точки рассматриваемой области координат x и y должно выполняться дифференциальное уравнение

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D}, \tag{1}$$

где

$$\Delta \equiv \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\cos\alpha\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{2}$$

Ввиду неограниченности рассматриваемой пластины и указанной периодичности нагрузки вопрос о граничных условиях исключается из рассмотрения.

При известном w изгибающие моменты M_x и M_y относительно координатных осей, обозначенных индексами, будут определяться равенствами

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{D}{\sin^2\alpha}\left[(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Delta w\right], \\ M_y &= \frac{D}{\sin^2\alpha}\left[(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \Delta w\right], \end{aligned} \tag{3}$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Крутящие моменты M^x и M^y относительно осей, нормальных, соответственно, к координатным плоскостям zy и zx, будут определяться из выражений

$$M^x = -\frac{D(1-\mu)}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \cos\alpha\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$
$$M^y = \frac{D(1-\mu)}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \cos\alpha\frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{4}$$

а перерезывающие силы Q^x и Q^y, параллельные оси z и действующие, соответственно, в плоскостях zy и zx, будут находиться из равенств

$$Q^x = -\frac{D}{\sin\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta w,$$
$$Q^y = -\frac{D}{\sin\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y} - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta w. \tag{5}$$

Обозначим через ξ и η полупериоды изменения нагрузки q вдоль координатных осей x и y. Если введем затем обозначения

$$r_m = \frac{\pi m}{\xi}, \qquad s_n = \frac{\pi n}{\eta}, \tag{6}$$

где m и n — целые числа, то функцию w, решающую поставленную задачу, можно будет представить в виде ряда

$$w = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_{mn}\cos(r_m x + s_n y) + B_{mn}\cos(r_m x - s_n y) + C_{mn}\sin(r_m x + s_n y) + D_{mn}\sin(r_m x - s_n y)\right]. \tag{7}$$

Здесь можно принять, что $B_{00} = B_{m0} = B_{0n} = C_{00} = D_{00} = D_{m0} = D_{0n} = 0$. Постоянная A_{00}, ввиду полной уравновешенности нагрузки в пределах каждого параллелограмного периода, также аннулируется. Остальные коэффициенты определяются из равенств

$$A_{mn} = \frac{1}{2Dp_{mn}^4\xi\eta}\int_{-\xi}^{+\xi}\int_{-\eta}^{+\eta} q\cos(r_m x + s_n y)\,dx\,dy,$$
$$B_{mn} = \frac{1}{2Dq_{mn}^4\xi\eta}\int_{-\xi}^{+\xi}\int_{-\eta}^{+\eta} q\cos(r_m x - s_n y)\,dx\,dy,$$
$$C_{mn} = \frac{1}{2Dp_{mn}^4\xi\eta}\int_{-\xi}^{+\xi}\int_{-\eta}^{+\eta} q\sin(r_m x + s_n y)\,dx\,dy, \tag{8}$$
$$D_{mn} = \frac{1}{2Dq_{mn}^4\xi\eta}\int_{-\xi}^{+\xi}\int_{-\eta}^{+\eta} q\sin(r_m x - s_n y)\,dx\,dy,$$

где

$$p_{mn}^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}(r_m^2 - 2r_m s_n\cos\alpha + s_n^2),$$
$$q_{mn}^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}(r_m^2 + 2r_m s_n\cos\alpha + s_n^2). \tag{9}$$

Ряд (7) для смещений дает их значения в обе стороны относительно некоторого среднего положения пластины. Для нахождения прогибов относительно определенного фиксированного уровня (например, уровня точек опор) необходимо при помощи этого же ряда определить значение w_0 для координат x и y точки, смещение которой должно быть принято за нулевое, и затем из значений w для произвольной точки вычесть w_0.

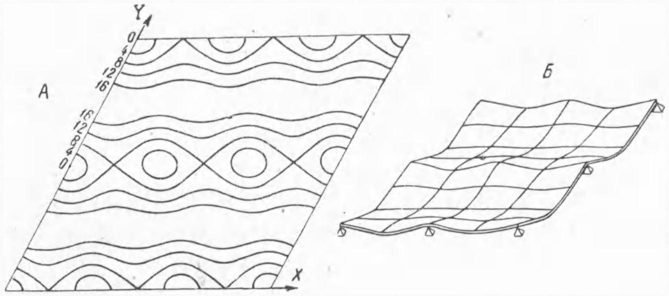

Рис. 1. Неограниченная пластинка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой и опирающаяся в узлах параллелограмной сетки. A — топографические кривые поверхности деформированной пластинки; $Б$ — перспективный вид участка деформированной пластинки

В качестве примера использования предыдущего общего решения приводим выражение для w для случая, когда пластина загружена сплошь равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q и подперта в узлах параллелограмной сетки. Для этого случая имеем

$$w = -\frac{2q\sin^4\alpha}{D\pi^4}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\xi^4\cos\frac{\pi n x}{\xi} + \eta^4\cos\frac{\pi n y}{\eta}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos\pi\left(\frac{mx}{\xi}+\frac{ny}{\eta}\right)}{\left(\frac{m^2}{\xi^2} - 2\frac{mn}{\xi\eta}\cos\alpha + \frac{n^2}{\eta^2}\right)^2} + \frac{\cos\pi\left(\frac{mx}{\xi}-\frac{ny}{\eta}\right)}{\left(\frac{m^2}{\xi^2} + 2\frac{mn}{\xi\eta}\cos\alpha + \frac{n^2}{\eta^2}\right)^2}\right]\right\}.$$

На рис. 1 показан план рассчитанных по этой формуле топографических кривых изогнутой поверхности пластины для случая, когда $\xi = 1$, $\eta = 1{,}6$, $\alpha = 60^\circ$ и $\frac{2q\sin^4\alpha}{D\pi^4} = 1$. Там же показан перспективный вид одного участка изогнутой поверхности этой пластины.

Поступило
28 X 1949