Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И. С. АРЖАНЫХ

К ТЕОРИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 30 IV 1950)

Целью настоящего сообщения является изложение некоторых результатов исследования вопроса об интегрировании динамических уравнений изотропного упругого тела:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \alpha \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}. \tag{1}$$

Ниже будут указаны представления вектора деформации $\mathbf{u}$ через волновые функции подобно тому, как в статическом случае вектор деформации представляется гармоническими функциями. Обозначим через $\mathbf{q}$ радиус-вектор точки $q(x, y, z)$ упругого тела Q, имеющего постоянные Ламе λ, μ и плотность ρ: $\alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, $\beta = \frac{\mu}{\rho}$.

Теорема 1′. *Пусть вектор* $\mathbf{v}$ *и скаляр* θ *удовлетворяют следующим уравнениям*:

$$\begin{gathered} -\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \alpha \nabla^2 \theta = 0, \quad \theta + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \operatorname{div}(\mathbf{q}\theta) = \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \beta \nabla^2 \mathbf{v} = -\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)^2 \mathbf{q} \nabla^2 \theta. \end{gathered} \tag{1′}$$

Тогда вектор $\mathbf{v} - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)\mathbf{q}\,\theta$ *удовлетворяет уравнению* (1).

Доказательство основано на тождестве

$$\nabla^2 \mathbf{q}\theta = 2 \operatorname{grad} \theta + \mathbf{q} \nabla^2 \theta$$

и равенстве $\theta = \operatorname{div} \mathbf{u}$, вытекающем из указанных уравнений.

Теорема 1″. *Пусть векторы* $\mathbf{w}$ и $\vec{\Omega}$ *удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$\begin{gathered} -\frac{\partial^2 \vec{\Omega}}{\partial t^2} + \beta \nabla^2 \vec{\Omega} = 0, \quad \vec{\Omega} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \operatorname{rot}[\mathbf{q}, \vec{\Omega}] = \operatorname{rot} \mathbf{w}, \\ -\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \alpha \nabla^2 \mathbf{w} = \frac{1}{2}\alpha\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 [\mathbf{q}, \nabla^2 \vec{\Omega}] = 0. \end{gathered} \tag{1″}$$

Тогда вектор $\mathbf{w} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)[\mathbf{q}, \vec{\Omega}]$ *удовлетворяет уравнению* (1).

В самом деле, $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$, $\nabla^2 [\mathbf{q}, \vec{\Omega}] = 2 \operatorname{rot} \vec{\Omega} + [\mathbf{q}, \nabla^2 \vec{\Omega}]$.

Теорема 2′ *Пусть вектор* $\mathbf{G}$ *и скаляр* g *удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2}+\beta\nabla^2\mathbf{G}=0, \qquad -\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}+\alpha\nabla^2 g=\frac{1}{2}\alpha\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2(\mathbf{q},\ \nabla^2\mathbf{G}). \tag{2'}$$

Тогда вектор $\mathbf{G}+\operatorname{grad}\left(g-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)(\mathbf{q},\mathbf{G})\right)$ *удовлетворяет уравнению* (1).

При доказательстве следует воспользоваться тождеством

$$\nabla^2(\mathbf{q},\mathbf{G})=2\operatorname{div}\overline{\mathbf{G}}+(\mathbf{q},\ \Delta^2\mathbf{G}).$$

Теорема 2″. *Пусть векторы* $\mathbf{H}$ *и* $\mathbf{h}$ (*удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$-\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}+\alpha\nabla^2\mathbf{H}=0, \qquad -\frac{\partial^2\mathbf{h}}{\partial t^2}+\beta\nabla^2\mathbf{h}=-\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)^2[\mathbf{q},\ \nabla^2\mathbf{H}]. \tag{2''}$$

Тогда вектор $\mathbf{H}+\operatorname{rot}\left(\mathbf{h}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)[\mathbf{q},\mathbf{H}]\right)$ *удовлетворяет уравнению* (1).

Указанные представления вектора деформации являются общими; они не учитывают граничных условий. Рассмотрим два класса характерных задач с граничными условиями: 1) собственные колебания $\mathbf{u}=\mathbf{a}\sin\nu t$ упругого тела Q: а) с закрепленными границами, б) со свободными границами и 2) вынужденные колебания $\mathbf{u}=\mathbf{b}\sin\varkappa t$ под действием: а) периодических поверхностных сил, б) периодических массовых сил.

Пусть S — поверхность упругого тела. Если Q находится внутри S, то имеем внутреннюю задачу; при Q, лежащем вне S, имеем внешнюю задачу. Вектор деформации $\mathbf{u}$ внутренней задачи должен быть правильным, а внешний — регулярным. Направим нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S внутрь Q.

Лемма. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вектор* $\mathbf{a}$ (*правильный, если* Q *внутри* S, *и регулярный, если* Q *вне* S) *удовлетворял в точках* q *области* Q *дифференциальному уравнению*

$$\mu\nabla^2\mathbf{a}+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}+\mathbf{f}=0, \tag{2}$$

состоит в том, чтобы он удовлетворял следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\mathbf{a}(p)=\frac{m}{4\pi}\int_Q\varphi(p,q)\,\mathbf{f}(q)\,dq+\frac{k}{4\pi}\int_Q\vartheta(q)\,\nabla_q\varphi\,dq+\frac{l}{4\pi}\int_Q[\vec{\omega}(q),\ \nabla_q(\varphi)]\,dq+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_S\mathbf{a}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS-\frac{1}{4\pi}\int_S\varphi\left(-k\mathbf{n}\vartheta+l\,[\mathbf{n},\ \vec{\omega}]+\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial n}\right)dS, \tag{3}$$

$$\vartheta=\operatorname{div}\mathbf{a}, \quad \vec{\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{a}, \quad m=\text{const}\neq 0, \quad k=1-m(\lambda+2\mu), \quad l=1-m\mu,$$

где $\varphi=F+\frac{1}{r}$, $\mathbf{r}=\mathbf{p}-\mathbf{q}$, *причем* $F(p,q)$ — *гармоническая функция относительно точек* p *и* q *области* Q.

Доказательство леммы выполнено в статье ([1]). В этой же статье я построил регулярные интегральные уравнения основных проблем равновесия изотропного упругого тела.

Теорема 3′. *Частоты* ν *собственных колебаний упругого тела* Q, *граничная поверхность* S *которого закреплена, определяются характеристическими числами* $\chi=\rho\nu^2$ *следующей системы интегральных уравнений:*

$$4\pi\mu\,\mathbf{a}(p) = \chi \int\limits_Q \Gamma(p, q)\,\mathbf{a}(q)\,dq - (\lambda + \mu) \int\limits_Q \vartheta(q)\,\nabla_q \Gamma\,dq,$$

$$4\pi(\lambda + 2\mu)\,\vartheta(p) = \chi \int\limits_Q (\nabla_p \Gamma, \mathbf{a})\,dq - (\lambda + \mu) \int\limits_Q \vartheta(q)\,(\nabla_p, \nabla_q)\,G\,dq, \tag{3''}$$

где $\Gamma = G + \frac{1}{r}$ *есть функция Грина проблемы Дирихле для поверхности* S.

Доказательство. Положим в уравнении (1) $\mathbf{u} = \mathbf{a}\sin\nu t$. Мы получим уравнение (2), где $\mathbf{f} = \rho\nu^2\,\mathbf{a}$. Затем возьмем $m = 1/\mu$ и $\varphi = \Gamma$. Так как на S $\Gamma = 0$ и $\mathbf{a} = 0$, то мы получим первое уравнение системы (3′). После этого вычислим $\vartheta(p) = \operatorname{div}_p \mathbf{a}$.

Теорема 3″. *Частоты* ν *свободных колебаний упругого тела* Q, *граничная поверхность которого закреплена, определяются характеристическими числами* $\chi = \rho\nu^2$ *системы интегральных уравнений.*

$$4\pi(\lambda + 2\mu)\,\mathbf{a}(p) = \chi \int\limits_Q \Gamma(p, q)\,\mathbf{a}(q)\,dq - (\lambda + \mu) \int\limits_Q [\nabla_q \Gamma, \vec{\omega}(q)]\,dq,$$

$$4\pi\mu\vec{\omega}(p) = \chi \int\limits_Q [\nabla_p \Gamma, \mathbf{a}(q)]\,dq - (\lambda + \mu) \int\limits_Q T(p, q)\,\vec{\omega}(q)\,dq, \tag{3''}$$

где тензор T *имеет следующую структуру:*

$$T = \{\nabla_p \cdot \nabla_q\}\,G - \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} (\nabla_p, \nabla_q)\,G,$$

а $\Gamma = G + \frac{1}{r}$ *есть функция Грина проблемы Дирихле для поверхности* S.

Доказательство выполняется так же, как и в предыдущем случае.

Теорема 4. *Пусть упругое тело* Q *лежит вне поверхности* S, *свободной от напряжений. Построим с помощью функций Грина* $N = H + \frac{1}{r}$ и $\Gamma = G + \frac{1}{r}$ *внешних проблем Неймана и Дирихле величины*

$$\varepsilon = (\nabla_p, \nabla_q)\,H, \quad \mathbf{e} = [\nabla_p, \nabla_q]\,H,$$

$$E = \{\nabla_p \times \nabla_q\}\,G - \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} (\nabla_p, \nabla_q)\,H + \{\nabla_p \cdot \nabla_q\}\,(H - G), \tag{4}$$

а затем следующую систему интегральных уравнений:

$$8\pi\mu\mathbf{a}(p) = \chi \int\limits_Q N\mathbf{a}\,dq - \lambda \int\limits_Q \vartheta \nabla_q N\,dq - \mu \int\limits_Q [\nabla_q N, \vec{\omega}]\,dq,$$

$$4\pi(\lambda + 2\mu)\,\vartheta(p) = \chi \int\limits_Q (\nabla_p N, \mathbf{a})\,dq - \lambda \int\limits_Q \varepsilon\vartheta\,dq - \mu \int\limits_Q (\mathbf{e}, \vec{\omega})\,dq, \tag{5}$$

$$4\pi\mu\vec{\omega}(p) = \chi \int\limits_Q [\nabla_p N, \mathbf{a}]\,dq - \lambda \int\limits_Q \mathbf{e}\,\vartheta\,dq - \mu \int\limits_Q E\vec{\omega}\,dq.$$

Частоты ν *собственных колебаний упругого тела* Q *связаны с характеристическими числами системы* (5) *зависимостью* $(\nu = \chi/\rho)^{1/2}$.

Для доказательства следует принять во внимание граничное условие на свободной поверхности S $2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu [\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{u}] = 0$, выполнить подстановку $\mathbf{u} = \mathbf{a} \sin \nu t$ в уравнении (1) и положить в уравнении (3) $m = 1/2\mu$, $\varphi = N$ $(\partial N / \partial n = 0)$. Затем необходимо вычислить $\vartheta = \operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$. При вычислении $\operatorname{rot}_p \mathbf{a}(p)$ появляется слагаемое $-\mu \operatorname{grad}_p \int\limits_S \frac{(\mathbf{n}, \vec{\omega})}{r} dS$, которое в данной задаче граничным условием не определяется. Для его устранения оказывается необходимой функция Грина проблемы Дирихле.

Рассмотрим теперь внешнюю задачу о вынужденных колебаниях упругого тела под действием поверхностной силы $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_0 \sin \varkappa t$. Граничное условие имеет вид $2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu [\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{u}] = \mathbf{F}_0 \sin \varkappa t$. Вынужденные колебания будем определять в виде $\mathbf{u} = \mathbf{b} \sin \varkappa t$.

Теорема 5. *Амплитуда вынужденных колебаний* $\mathbf{b}$, *расходимость амплитуды* ϑ *и вихрь ее* $\vec{\omega}$ *удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:*

$$8\pi\mu \mathbf{b}(p) = \mathbf{b}_0 + \rho\varkappa^2 \int\limits_Q N \mathbf{b}\, dq - \lambda \int\limits_Q \vartheta \nabla_q N\, dq - \mu \int\limits_Q [\nabla_q N, \vec{\omega}]\, dq,$$

$$4\pi(\lambda + 2\mu)\vartheta(p) = \vartheta_0 + \rho\varkappa^2 \int\limits_Q (\nabla_q N, \mathbf{b})\, dq - \lambda \int\limits_Q \varepsilon\vartheta\, dq - \mu \int\limits_Q (\mathbf{e}, \vec{\omega})\, dq, \tag{6}$$

$$4\pi\mu\vec{\omega}(p) = \vec{\omega}_0 + \rho\varkappa^2 \int\limits_Q [\nabla_q N, \mathbf{b}]\, dq - \lambda \int\limits_Q \mathbf{e}\vartheta\, dq - \mu \int\limits_Q E\vec{\omega}\, dq,$$

где скаляр ε, *вектор* $\mathbf{e}$ *и тензор* E *определяются формулами* (4), *а величины* $\mathbf{b}_0$, ϑ_0, $\vec{\omega}_0$ *суть:*

$$\mathbf{b}_0 = -\int\limits_S N\mathbf{F}_0\, dS, \quad \vartheta_0 = \operatorname{div}_p \mathbf{b}_0, \quad \vec{\omega}_0 = \operatorname{rot}_p \mathbf{b}_0. \tag{7}$$

Вынужденные колебания с частотой массовых сил исследуются тем же методом. Интегральные уравнения задачи с закрепленными границами для амплитуды и ее расходимости имеют вид уравнений (1θ) и (B), указанных в статье ([1]), причем $\mathbf{b}_0 = \int\limits_Q \Gamma \mathbf{f}_0\, dq$, где $\mathbf{f}_0$—амплитуда массовых сил. Интегральные уравнения для амплитуды и вихря ее (той же задачи) имеют вид уравнений (1Ω) и (C), указанных там же. Амплитуда вынужденных колебаний с частотой массовых сил упругого тела со свободными границами определяется системой интегральных уравнений (Д) и (П) статьи ([1]).

Характерной особенностью построенных выше интегральных уравнений является их регулярность.

Динамические задачи теории упругости с граничными и начальными условиями после преобразования Лапласа этим же методом приводятся к интегральным уравнениям.

Институт математики и механики
Академии наук Уз.ССР

Поступило
12 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Аржаных, Доклады АН Уз.ССР, № 4 (1950).