Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Ю. И. ЯГН и Е. Н. ТАРАСЕНКО

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 29 V 1950)

В работе Г. Ю. Джанелидзе (1) прикладные теории упругой деформации стержней получили широкое обобщение на основе естественной кинематической схемы, учитывающей влияние на продольные удлинения переменности депланации сечений от кручения. Вместе с тем в этой работе для деформации за пределом упругости предложена упрощенная кинематическая модель, построенная на представлении о сохранении плоской формы сечений при всех видах деформации стержня включая кручение. Однако испытания свидетельствуют об углубляющемся короблении сечений на всех стадиях пластического закручивания. При этом видимые по контуру сечений формы и размеры депланации близки к получающимся при той же степени закручивания на упругой стадии деформации.

Изложенное заставляет рекомендовать при построении прикладной теории пластической деформации стержней сохранить кинематическую схему, отвечающую упругой стадии*. Кинематическая картина деформации будет описываться следующими уравнениями:

$$\varepsilon_z = \varepsilon + \varkappa_1 y - \varkappa_2 x + \dot{\tau}\varphi, \quad \gamma_{xz} = \tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) + \bar{\gamma}_{xz}, \gamma_{yz} = \tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) + \bar{\gamma}_{yz}. \tag{1}$$

Здесь ε_z продольное относительное удлинение; γ_{xz} и γ_{yz} — сдвиги в продольных плоскостях, параллельных главным центральным осям инерции сечения; ε — среднее по сечению значение ε_z; τ — относительный угол закручивания; $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — компоненты кривизны оси стержня в плоскостях главных центральных осей инерции; x и y — координаты в тех же осях; φ — функция кручения, удовлетворяющая уравнению $\Delta\varphi = 0$, граничному условию $\partial\varphi/\partial n = y\cos(n, x) - x\cos(n, y)$ и условию $\int_\Omega \varphi\, d\Omega = 0$ для определения постоянной, и $\bar{\gamma}_{xz}$ и $\bar{\gamma}_{yz}$ — дополнительные сдвиги сверх отвечающих форме чистого кручения**.

Пренебрегая изменениями объема при деформации, можно написать следующие выражения для напряжений в сечении стержня:

$$\sigma_z = 3\mu\varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \tag{2}$$

* Такое утверждение было высказано В. В. Новожиловым (2).

** Наличие последних слагаемых отличает уравнение (1) от соответствующих уравнений, принятых для упругой стадии в работе Г. Ю. Джанелидзе.

где μ — переменный модуль сдвига, который, в соответствии с общепринятыми законами пластического деформирования, будем считать функцией интенсивности деформации:

$$\mu = \mu(e), \tag{3}$$

$$e = \sqrt{\frac{1}{3}(\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2 + 3\varepsilon_z^2)}\,^*. \tag{4}$$

Имея в виду обычно малое значение сдвигов $\overline{\gamma}_{xz}$ и $\overline{\gamma}_{yz}$, можно при вычислении e пренебречь ими. Тогда после подстановки из (1) в (4) получим:

$$e = \sqrt{\frac{1}{3}[\tau^2\psi^2 + 3(\varepsilon + \varkappa_1 y - \varkappa_2 x + \dot{\tau}\varphi)^2]}, \tag{5}$$

где

$$\psi^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)^2. \tag{6}$$

Зависимость (3) должна быть установлена с помощью апроксимирования экспериментальных данных.

Обобщенные силы в сечении стержня, отвечающие обычной схеме решения задачи, когда не учитываются перерезывающие силы, представятся выражениями:

$$V_z = \int\limits_\Omega \sigma_z d\Omega = 3\int\limits_\Omega \mu(\varepsilon + \varkappa_1 y - \varkappa_2 x + \dot{\tau}\varphi)\, d\Omega; \qquad (а)$$

$$M_x = \int\limits_\Omega \sigma_z y\, d\Omega = 3\int\limits_\Omega \mu(\varepsilon y + \varkappa_1 y^2 - \varkappa_2 xy + \dot{\tau}\varphi y)\, d\Omega; \qquad (б)$$

$$M_y = -\int\limits_\Omega \sigma_z x\, d\Omega = -3\int\limits_\Omega \mu(\varepsilon x + \varkappa_1 xy - \varkappa_2 x^2 + \dot{\tau}\varphi x)\, d\Omega; \qquad (в) \tag{7}$$

$$M_z = \int\limits_\Omega (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})\, d\Omega = \int\limits_\Omega \mu\left\{\left[\tau\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) + \overline{\gamma}_{yz}\right] x - \right.$$

$$\left. - \left[\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) + \overline{\gamma}_{xz}\right] y\right\} d\Omega; \qquad (г)$$

$$B = \int\limits_\Omega \sigma_z\varphi\, d\Omega = 3\int\limits_\Omega \mu[\varepsilon\varphi + \varkappa_1 y\varphi - \varkappa_2 x\varphi + \dot{\tau}\varphi^2]\, d\Omega, \qquad (д)$$

где V_z — растягивающая сила, M_x и M_y — изгибающие моменты; M_z — крутящий момент и B — бимомент.

Крутящий момент M_z естественно разделить на два слагаемых:

$$M_z = \tau T + K. \tag{8}$$

Здесь

$$T = \int\limits_\Omega \mu\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)x - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)y\right] d\Omega = \int\limits_\Omega \mu\zeta\, d\Omega, \tag{9}$$

где

$$\zeta = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)x - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)y;$$

$$K = \int\limits_\Omega \mu(\overline{\gamma}_{yz}x - \overline{\gamma}_{xz}y)\, d\Omega. \tag{10}$$

* Выражение (4) получено в предположении $\gamma_{xy} = 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -0{,}5\varepsilon_z$.

Дифференциальное уравнение равновесия элемента стержня, получаемое из уравнений работ сил при вариации относительным углом закручивания, будет иметь вид:

$$\frac{dB}{dz} + K + b = 0. \tag{11}$$

Здесь b — интенсивность внешней бимоментной нагрузки.

Уравнение (11) с помощью (7 д) дает возможность найти K, и тогда из (8) получается следующий результат для крутящего момента:

$$M_z = \tau T - 3\int\limits_{\Omega} \{\mu\,[\varepsilon\dot{\varphi} + \dot{\varkappa}_1 y\varphi - \dot{\varkappa}_2 x\varphi + \tau\ddot{\varphi}^2] +$$

$$+ \dot{\mu}\,[\varepsilon\varphi + \varkappa_1 y\varphi - \varkappa_2 x\varphi + \dot{\tau}\varphi^2]\}\, d\Omega - b. \tag{12}$$

Подставляя затем в это уравнение и в уравнения для продольной силы и изгибающих моментов (7 а, б, в) модуль μ, выраженный на основании зависимости (3), получим четыре уравнения с четырьмя неизвестными ε, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и τ.

В такой общей подстановке, даже при простейших видах зависимости (3), уравнения получаются весьма сложными. Однако задача может быть значительно упрощена в частных случаях. Ниже рассмотрены случаи деформации стержня с сечением, имеющим две оси симметрии, при симметричном относительно этих осей распределении интенсивности деформации e и соответственно значений модуля μ.

При этих условиях будем иметь:

$$\int\limits_{\Omega} \mu x\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \dot{\mu} y\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \mu\varphi x\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \mu\varphi y\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \mu x y\, d\Omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \mu\varphi\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \dot{\mu}\dot{\varphi}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \dot{\mu}\varphi x\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \dot{\mu}\varphi y\, d\Omega = 0. \tag{13}$$

Получающиеся в каждом случае уравнения сначала приведены в общем виде, а затем преобразованы для материала, у которого модуль μ изменяется по параболическому закону:

$$\mu = \mu_0\,[1 - 3\alpha e^2]. \tag{14}$$

Такая зависимость удовлетворительно согласуется с опытом для начальной стадии пластического растяжения многих металлов.

1. Плоский изгиб с кручением при условии пренебрежимо малых бимоментных эффектов:

$$\varepsilon = \varkappa_2 = \dot{\tau} = b = 0\ ^*. \tag{15}$$

Уравнение (14), если принять во внимание (5) и (15), примет вид:

$$\mu = \mu_0\,[1 - \alpha\,(\tau^2\psi^2 + 3\varkappa_1^2 y^2)]. \tag{16}$$

Уравнения (7 а, б, в, д) и (12) при условиях (15) и (16) дадут:

$$V_z = M_y = B = 0; \tag{17}$$

---

* Здесь малость бимоментных деформаций предположена обеспеченной постоянством относительного угла закручивания. С равным успехом можно поставить условие $\varphi = 0$ (случай сечений, близких к кругу).

$$M_x = 3\mu_0\varkappa_1\{J_x - \alpha\tau^2\Theta_{\psi x} - 3\alpha\varkappa_1^2\Theta_x\}; \qquad (18)$$

$$M_z = \mu_0\tau\{J_k - 3\alpha\varkappa_1^2\Theta_{\zeta x} - \alpha\tau^2\Theta_{\zeta\psi}\}, \qquad (19)$$

где J_x — экваториальный момент инерции сечения относительно оси x, J_k — геометрическая жесткость при свободном упругом кручении, а $\Theta_{\psi x}$, Θ_x, $\Theta_{\zeta x}$ и $\Theta_{\zeta\psi}$ — новые характеристики сечения:

$$\Theta_{\psi x} = \int\limits_\Omega \psi^2 y^2 d\Omega, \quad \Theta_x = \int\limits_\Omega y^4 d\Omega, \quad \Theta_{\zeta x} = \int\limits_\Omega \zeta y^2 d\Omega, \quad \Theta_{\zeta\psi} = \int\limits_\Omega \zeta\psi^2 d\Omega. \qquad (20)$$

Расчет $\varkappa_1$ и τ по уравнениям (18) и (19) может быть произведен либо графически, либо путем подбора корней указанных уравнений.

Аналогичным путем разрешается задача в случае кручения с растяжением при сохранении того же условия малости напряжений, связанных с бимоментами.

2. Стесненное кручение с бимоментной нагрузкой:

$$\varepsilon = \varkappa_1 = \varkappa_2 = 0. \qquad (21)$$

В этом случае отличными от нуля обобщенными силами будут лишь M_z и B.

Принятая зависимость для модуля представится в виде:

$$\mu = \mu_0[1 - \alpha(\tau^2\psi^2 + 3\dot{\tau}^2\varphi^2)]. \qquad (22)$$

При условиях (21) и (22) из уравнений (12) и (7 д) получим:

$$M_z = \mu_0\{\tau J_k - \alpha\tau^3\Theta_{\zeta\psi} - 3\alpha\dot{\tau}^2\tau(\Theta_{\zeta\varphi} - 2\Theta_{\psi\varphi}) -$$

$$- 3\ddot{\tau}J_\varphi + 3\alpha\ddot{\tau}\tau^2\Theta_{\psi\varphi} + 27\,\alpha\ddot{\tau}\dot{\tau}^2\Theta_\varphi\} + b; \qquad (23)$$

$$B = 3\mu_0\dot{\tau}(J_\varphi - \alpha\tau^2\Theta_{\psi\varphi} - 3\alpha\dot{\tau}^2\Theta_\varphi). \qquad (24)$$

Здесь введены следующие обозначения для новых характеристик сечения:

$$\Theta_{\zeta\varphi} = \int\limits_\Omega \zeta\varphi^2 d\Omega, \quad J_\varphi = \int\limits_\Omega \varphi^2 d\Omega, \quad \Theta_{\psi\varphi} = \int\limits_\Omega \psi^2\varphi^2 d\Omega, \quad \Theta_\varphi = \int\limits_\Omega \varphi^4 d\Omega. \qquad (25)$$

В общей форме уравнение (23) записывается так:

$$\ddot{\tau}\dot{\tau}^2 + A\ddot{\tau}\tau^2 + B\ddot{\tau} + C\dot{\tau}^2\tau + D\tau^3 + E\tau + G = 0. \qquad (23')$$

где A, B, C, D и E — постоянные величины.

Приближенное решение уравнения (23′) может быть получено с помощью вариационного метода Б. Г. Галеркина или численного интегрирования.

Поступило
1 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ю. Джанелидзе, Автореферат диссертации Статика упруго-пластических стержней, Л., 1949; ДАН, 66, № 4 (1949). [2] В. В. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, 1948, § 49.