**Доклады Академии Наук СССР**
**1950. Том LXXIII, № 1**

*ГИДРОМЕХАНИКА*

**Б. Б. ЛАПУК**

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О ВЫТЕСНЕНИИ ГАЗА НЕСЖИМАЕМОЙ ВОДОЙ

*(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 17 IV 1950)*

Для простоты будем считать газ совершенным, процесс фильтрации изотермическим. Последнее допущение достаточно обосновано (см. ([3])). Вопрос о движении реальных газов в пористой среде был рассмотрен нами ранее ([4]).

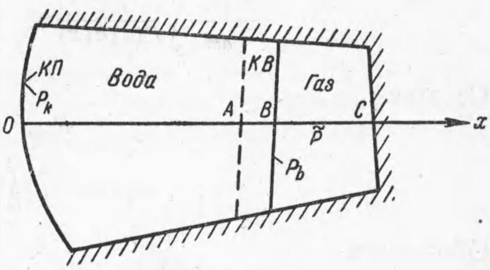


Рис. 1

Пусть в результате извлечения газа из залежи давление в ней падает и контур водоносности продвигается. Обозначим (см. схему газовой залежи, изображенную в плане на рис. 1, границы пласта заштрихованы): $x_к = OC$— расстояние до контура питания $КП$; $x_0 = OA$—расстояние от контура питания $КП$ до первоначального положения контура водоносности; $x = OB$ — расстояние от $КП$ до перемещающегося контура водоносности $КВ$; $F = F(x)$ — площадь нормального к направлению скорости фильтрации поперечного сечения пласта вертикальной плоскостью, рассматриваемая как функция $x$; $\tilde{P}$, $P_в$, $P_к$— отношения, соответственно, средневзвешенного по обему давления в газовой части пласта ($\tilde{P}$), давления на контуре водоносности ($P_в$) и на контуре области питания пласта ($P_к$) к атмосферному давлению $P_{am}$ (при пластовой температуре). $k$ и $m$, — соответственно, проницаемость и пористость пласта; в общем случае $k = k(x)$ и $m = m(x)$; $\mu_в$ и $\mu_г$, — соответственно, абсолютная вязкость воды и газа; $Q = Q(t)$— расход газа, приведенный к атмосферному давлению (при пластовой температуре) и являющийся известной (заданной) функцией времени $t$; $\Omega$ — объем порового пространства газоносной части залежи

$$\Omega = \int_{x_0}^{x_к} m(x) F(x)\, dx. \qquad (1)$$

Давление $P_в$ на контуре водоносности есть величина переменная зависящая от положения контура водоносности $x$, а следовательно от времени $t$

$$P_в = P_в(t). \qquad (2)$$

Вместе с тем величина давления на контуре водоносности зависит от темпа отбора газа из газовой залежи, вязкости газа, проницаемости газоносной части пласта и геометрии фильтрации (т. е. характера движения — одномерное, радиальное и т. п.).

При средней скорости фильтрации воды на контуре водоносности, равной $v$, расход воды $Q_в$ составит

$$Q_в = vF(x). \tag{3}$$

Принимая, что в области водоносности фильтрация происходит по закону Дарси и средняя в сечении $F(x)$ скорость фильтрации воды равна

$$v = -\frac{k(x)\,P_{am}}{\mu_в}\,\frac{dP_в}{dx}, \tag{4}$$

получим

$$Q_в = -\frac{k(x)\,P_{am}}{\mu_в}\,F(x)\,\frac{dP_в}{dx}. \tag{5}$$

Разделяя в (5) переменные и интегрируя полученное уравнение по $x$ в пределах от 0 до $x$ и по $P_в$ в пределах от $P_к$ до $P_в$, получим:

$$\frac{Q_в\mu_в}{P_{am}}\int\limits_0^x \frac{dx}{F(x)\,k(x)} = -\int\limits_{P_к}^{P_в} dP_в = P_к - P_в.$$

Отсюда

$$Q_в = \frac{P_{am}}{\mu_в}\,\frac{P_к - P_в}{\int\limits_0^x \frac{dx}{k(x)\,F(x)}}. \tag{6}$$

Обозначим

$$\omega(x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{k(x)\,F(x)}; \tag{7}$$

тогда формула расхода принимает вид

$$Q_в = \frac{P_{am}}{\mu_в} = \frac{P_к - P_в(t)}{\omega(x)}. \tag{8}$$

Средняя скорость движения контура водоносности

$$W = \frac{Q_в}{m(x)\,F(x)} = \frac{P_{am}}{\mu_в}\,\frac{P_к - P_в(t)}{m(x)\,F(x)\,\omega(x)}. \tag{9}$$

С другой стороны, скорость движения контура водоносности

$$W = \frac{dx}{dt}. \tag{10}$$

Обозначая

$$\Delta(x) = m(x)\,F(x)\,\omega(x) \tag{11}$$

и приравнивая правые части уравнений (9) и (10), получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P_{am}}{\mu_в}\,\frac{P_к - P_в(t)}{\Delta(x)}. \tag{12}$$

Уравнения, аналогичные (8) и (12), были получены И. А. Чарным ([5]) при решении задачи о вытеснении нефти водой.

Разделяя переменные в уравнении (12), получим

$$\frac{\mu_в}{P_{am}} \Delta(x)\,dx = [P_к - P_в(t)]\,dt. \tag{13}$$

Начальное и граничное условия формулируются следующим образом:

$$\text{при} \quad t = 0 \quad P_к = P_в, \quad x = x_0;$$

$$\text{при} \quad x = 0 \quad P_к = P_в = \text{const}.$$

Интегрируя уравнение (13) по $t$ в пределах от 0 до $t$ и по $x$ от $x_0$ до $x$, имеем

$$\frac{\mu_в}{P_{am}} \int_{x_0}^{x} \Delta(x)\,dx = \int_0^t [P_к - P_в(t)]\,dt. \tag{14}$$

Обозначим

$$\Delta_1(x) = \frac{\mu_в}{P_{am}} \int_{x_0}^{x} \Delta(x)\,dx. \tag{15}$$

Величина $\Delta_1(x)$ легко может быть определена аналитически или графически при известных или заданных $k(x)$, $m(x)$ и $F(x)$. Если же известны значения $\Delta_1(x)$, то по тем же данным легко найти и соответствующие им значения величины $x$ и продвижения контура водоносности $(x - x_0)$.

Таким образом, из уравнения (14) имеем

$$\Delta_1(x) = P_к t - \int_0^t P_в(t)\,dt. \tag{16}$$

Для решения интересующего нас вопроса о величине продвижения контура водоносности применим метод последовательных приближений.

Допустим в первом приближении, что входящая в уравнение (16) величина давления $P_в(t)$ на контуре водоносности изменяется во времени так, как она изменялась бы в условиях газового режима (см. ([3])). Определенные из такой предпосылки значения $\Delta_1$ и соответствующие им величины продвижения контура водоносности $(x - x_0)$ будут завышены против истинных, ибо, как видно из формулы (9), в этом случае скорости продвижения контура водоносности заведомо завышены, а следовательно, значения $\Omega$ объема газоносной части пласта заведомо занижены.

Зная изменение добычи газа $Q(t)$ и $\int_0^t Q(t)\,dt$, по указанным значениям $\Omega$ определяем соответствующие им значения давления $P_в(t)$ на контуре водоносности. Эти значения $P_в$ будут завышены против истинных.

Подставив найденные таким образом завышенные значения $P_в(t)$ в уравнение (16), определим заниженные значения $(x - x_0)$. Истинное значение продвижения контура водоносности $(x - x_0)$ заключено между указанными завышенными и заниженными значениями.

Если полученная в первом приближении „вилка“ окажется слишком широкой, то переходим ко второму приближению, для чего повторяем вычисления, воспользовавшись для нахождения последующих завышенных и заниженных значений $(x - x_0)$ найденными в первом приближении заниженными и завышенными значениями $P_в(t)$, и т. д. до получения удовлетворительных результатов.

Примеры решения изложенным методом задач о продвижении контура водоносности в простейших условиях одномерного (прямолинейного) и радиального движения в однородных по пористости, проницаемости и мощности пластах приведены в нашей книге ([6]). Выше рассмотрена задача о вытеснении газа несжимаемой водой. Учет упругости воды и пласта не представляет затруднений.

В заключение напомним, что впервые задача о вытеснении газа водой рассмотрена Л. С. Лейбензоном ([1], [2]), принимавшим вязкость воды равной нулю.

Поступило
12 IV 1950

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, Нефтепромысловая механика, 2, М.—Л., 1934. [2] Л. С. Лейбензон, Движение природных жидкостей и газов в пористой среде, М., 1947. [3] Б. Б. Лапук, Теоретические основы разработки месторождений природных газов, М—Л., 1948. [4] Б. Б. Лапук, ДАН, 58, № 3 (1947). [5] И. А. Чарный, Подземная гидромеханика, М.—Л., 1948. [6] В. Н. Щелкачев и Б. Б. Лапук, Подземная гидравлика, М.—Л., 1949.