Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

А. Л. КЛЯЧКИН

ИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 25 V 1950)

1. Дифференциальные уравнения изотермического течения. Напишем дифференциальное уравнение одноразмерного движения газа в цилиндрической трубе при наличии теплообмена и трения:

$$(M^2-1)\frac{w\,dw}{g} = -M^2\Big(k\,dL_r + \frac{k-1}{A}\,dQ_в\Big). \tag{1}$$

Здесь dL_r, $dQ_в$ — соответственно, элементарные работа трения и внешнее тепло, отнесенные к 1 кг газа на пути dx; $dL_r = \lambda\frac{w^2}{2\,g}\frac{dx}{D}$, $dQ_в = q\,dx$; $M^2 = \frac{w^2}{a^2}$.

Заменив $w\,dw\,/\,g$ в (1) его значением из уравнения энергии

$$dQ_в = c_p dT + A\frac{w\,dw}{g},$$

найдем

$$(M^2-1)\,c_p dT = kM^2 dQ_r - (1-kM^2)\,dQ_в. \tag{2}$$

Из (2) следует, что условием осуществления изотермического течения ($dT=0$) в цилиндрической трубе является

$$dQ_в = \frac{kM^2}{1-kM^2}\,dQ_r \tag{3}$$

и что без трения реализовать изотермическое течение в цилиндрической трубе невозможно.

Подставив значение $dQ_в$ из (3) в (1), получим

$$(1-kM^2)\frac{w\,dw}{g} = kM^2 dL_r. \tag{4}$$

Наконец, заменив $w\,dw\,/\,g$ в (4) его значением из уравнения Бернулли

$$\frac{w\,dw}{g} + v\,dp + dL_r = 0,$$

найдем

$$(1-kM^2)\,v\,dp = -\frac{w^2}{g}\,dL_r. \tag{5}$$

2. Физические особенности предельного состояния газа в изотермическом течении. Из уравнений (3), (4) и (5) следует, что изотермическое течение является предельным и что особая точка его соответствует числу $M^* = 1/\sqrt{k}$; для $k = 1{,}4$ $M^* \approx 0{,}845$.

Действительно, так как $dL_r/dx = \lambda w^2/2gD$ всегда существенно положительная величина, то при $M^* = 1/\sqrt{k}$ $dp^*/dx = \infty$, $dw^*/dx = \infty$, $dQ_в^*/dx = q = \infty$, $dM^*/dx = \infty$ и $ds^*/dx = \infty$ (так как $ds = dQ/T = (dQ_в + dQ_r)/T = dQ_r/T(1 - kM^2)$).

Таким образом, непрерывный переход через $M = 1/\sqrt{k}$ в изотермическом течении не представляется возможным (рис. 1).

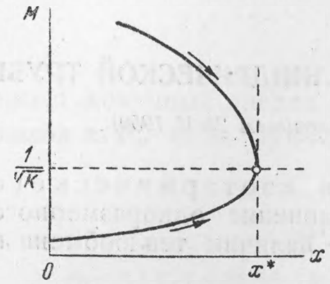

Рис. 1. Изменение числа M вдоль трубы при изотермическом течении

Физический смысл предельного состояния изотермического течения состоит, следовательно, в том, что для сохранения $T = \text{const}$ в особой точке интенсивность подвода тепла ($q = dQ_в/dx$) возрастает до бесконечности.

Исследуем процесс трения в особой точке. Найдем из (4) $\frac{dL}{dM} = \frac{1 - kM^2}{M} RT$, откуда $dL_r^*/dM = 0$ ($M = 1/\sqrt{k}$). Вместе с тем $dL_r^*/dx = \lambda RT/2D \neq 0$.

Из $dL_r^*/dx \neq 0$ и $dL_r^*/dM = 0$ следует другая важная особенность предельного состояния изотермического течения: в особой точке процесс течения происходит по обратимой изотерме, так как все тепло трения обратимо превращается в кинетическую энергию потока. Но так же, как наличие трения обусловливает осуществимость изотермического (необратимого) течения, обратимость процесса в предельном состоянии исключает дальнейшую возможность течения $T = \text{const}$ в цилиндрической трубе.

Из уравнений (3), (4) и (5) также следует, что при подводе тепла ($dQ_в > 0$) изотермическое течение может быть реализовано лишь в области $0 < M < 1/\sqrt{k}$.

При отводе же тепла ($dQ_в < 0$) изотермическое течение возможно лишь в области $1/\sqrt{k} < M < \infty$.

3. Зависимость между параметрами газа и безразмерной длиной трубы. Параметры газа в изотермическом течении связаны соотношением

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{M_2}{M_1}. \tag{6}$$

Зависимость между безразмерной длиной трубы и числом M определяется по выражению

$$\lambda \frac{x}{D} = 2 \ln \frac{M_1}{M_2} - \frac{1}{k}\left[\frac{1}{M_2^2} - \frac{1}{M_1^2}\right], \tag{7}$$

которое находится интегрированием ([3]) уравнения Бернулли (полагая* $\lambda = \text{const}$)

* Допущение относительно независимости λ от Re оказывается достаточно точным при больших значениях чисел Re ($> 10^5$) как для гладких, так и для шероховатых труб. Так, из известной формулы Никурадзе $\lambda = 0{,}0032 + 0{,}221/\text{Re}^{0{,}237}$ следует, что при увеличении Re от 10^7 до 10^8, т. е. в 10 раз, λ уменьшается на 24%. Многочисленные исследования не обнаружили влияния M на λ.

$$\frac{w\,dw}{g} + v\,dp + \lambda \frac{w^2}{2g}\frac{dx}{D} = 0.$$

На рис. 2 представлено влияние начального M_1 на предельное значение $\lambda x^*/D$, соответствующее $M^* = 1/\sqrt{k}$.

Пользуясь соотношениями (6) и уравнением (7), можно найти зависимость $M(x)$, $w(x)$, $p(x)$, $\gamma(x)$.

4. Определение тепла, подведенного к газу, в изотермическом течении.

$$Q_в \text{ (внешнее тепло)} = \frac{A}{2g}(w_2^2 - w_1^2) = \frac{AkRT}{2}(M_2^2 - M_1^2); \qquad (8)$$

$$Q_c \text{ (суммарное тепло)} = T\Delta S = ART \ln\frac{M_2}{M_1}; \qquad (9)$$

$$Q_r \text{ (тепло трения)} = Q_c - Q_в = ART\left[\ln\frac{M_2}{M_1} - \frac{k}{2}(M_2^2 - M_1^2)\right]. \qquad (10)$$

На рис. 3 представлено влияние числа M на $Q_в$, Q_c и Q_r, а также на функцию

$$\frac{dQ_в}{dQ_c} = \frac{q}{\frac{\lambda}{2}AkRT} = \frac{kM^2}{1 - kM^2}, \qquad (11)$$

пропорциональную интенсивности подвода тепла.

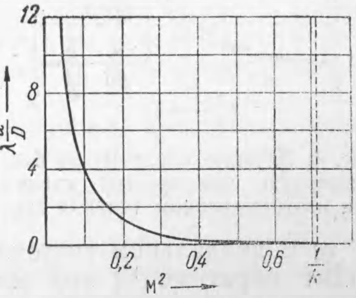

Рис. 2. Влияние числа M_1 на параметр $\lambda\frac{x^*}{D}$; $M_2^2 = \frac{1}{k}$

5. Изменение температуры стенки трубы по числу M. Пусть внешнее тепло, потребное для поддержания постоянной температуры, подводится через стенки канала. Тогда, на основании гидродинамической теории теплообмена [2],

$$dQ_в = \frac{\lambda c_p}{2D}(T_{cm} - T_0)\,dx = \frac{\lambda c_p T}{2}\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)(\Theta - 1)\frac{dx}{D}, \qquad (12)$$

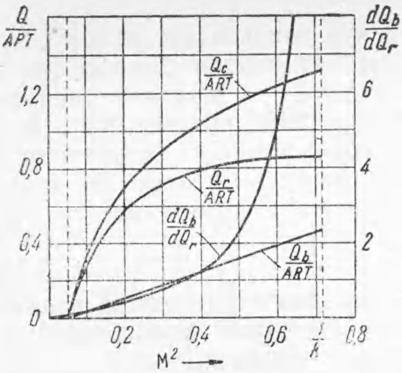

Рис. 3. Влияние числа M на тепло, подведенное к газу в изотермическом течении. $M_1^2 = 0{,}05$

где: $\Theta = T_{cm}/T_0$ — безразмерная температура стенки; T_{cm} — температура стенки; $T_0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)$ — температура полностью заторможенного в пограничном слое потока.

Подставив в (3) значения $dQ_в$ из (8) и dL_r, найдем после преобразований:

$$\Theta = \frac{T_{cm}}{T_0} = 1 + \frac{kM^4}{(1 - kM^2)\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}; \qquad (13)$$

$$\frac{T_{cm}}{T} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2 + \frac{kM^4}{1 - kM^2}\right); \qquad (13')$$

при $M = 0$ $\quad \Theta = 1, \quad \frac{T_{cm}}{T} = 1;$

$$\text{при } M = \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad \Theta = \infty, \qquad \frac{T_{ст}}{T} = \infty.$$

Следовательно, изменению M в пределах $1/\sqrt{k} > M > 0$ соответствует изменение Θ и T_{cm}/T в пределах $\infty > \Theta > 1$ и $\infty > T_{cm}/T > 1$.

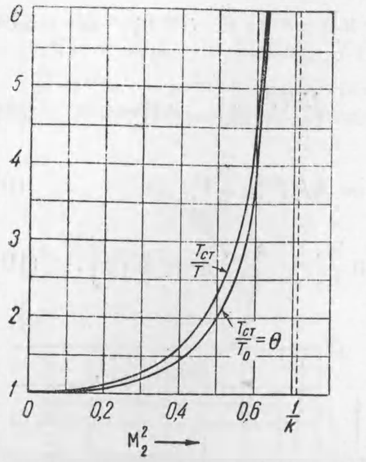

Рис. 4. Влияние числа M на безразмерную температуру стенки при изотермическом течении газа

Формулы (7) и (13) позволяют определить изменение температуры стенки вдоль трубы.

6. Выводы. 1) Предельные состояния в течениях газа с теплообменом и при наличии трения, связанные с переходом через скорость звука, хорошо известны и изучены: И. И. Новиковым было показано [2], что эти течения (за исключением изоэнтропийного) не являются политропными ($n = \text{const} \neq k$), так как в особой точке процесс обязательно происходит изоэнтропийно, по обратимой адиабате ($n = k$).

2) Из вышеизложенного, однако, следует, что существуют и другие классы предельных течений. К ним, например, относится изотермическое течение с трением ($n = 1$), для которого предельное состояние определяется переходом через $M = 1/\sqrt{k}$.

3) В предельном состоянии процесс течения реального газа происходит обратимо [1]; это значит, что в особой точке тепло трения обратимо превращается в кинетическую энергию потока.

Поступило
16 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Новиков, ЖТФ, № 6 (1949). [2] И. И. Новиков, ЖТФ, № 6, (1949). [3] С. А. Христианович. Прикладная газовая динамика, 1948.