Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Х. Л. СМОЛИЦКИЙ

ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 V 1950)

1. Пусть Ω — область n-мерного пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ограниченная гладкой замкнутой поверхностью S. Наиболее простая постановка предельной задачи такова: в области $\overline{\Omega}$, $t \geqslant 0$ требуется найти функцию $u(x_1, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\Box u = \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x_1, \ldots, x_n, t), \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}; \tag{1}$$

начальным условиям

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, \ldots, x_n), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x_1, \ldots, x_n); \tag{2}$$

предельному условию:

$$u|_S = \psi(x_1, \ldots, x_n, t), \tag{3}$$

где f, u_0, u_1, ψ — заданные функции.

Предельной задаче для линейных уравнений второго порядка нормального гиперболического типа посвящен ряд работ, которые можно разбить на три группы.

В работах первой группы ([1], [2]) доказывается существование решения в некоторой области, прилегающей к многообразию S, $t = 0$.

В работах второй группы ([3], [4]) решается волновое уравнение разложением решения в ряд Фурье по фундаментальным функциям уравнения Гельмгольца; в работах этой группы не ставится вопроса о достаточных условиях существования решения.

В работах третьей группы ([5–7]) задача решается методом неполного разделения переменных для специальных ограничивающих поверхностей (сфера, круг, цилиндр, конус) и специальных граничных условий.

2. В этой статье решается вопрос о существовании решения задачи (1), (2), (3) во всей области $\overline{\Omega}$, $t \geqslant 0$ и вопрос о характере решения в зависимости от характера данных f, u_0, u_1, ψ. О поверхности S предполагается, что максимумы в $\overline{\Omega}$ производных фундаментальных функций уравнения $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ при условии $u|_S = 0$ растут не быстрее некоторой степени собственного числа λ^2 (показатель степени зависит от порядка производной). Нами доказано, что это имеет место для поверхностей Ляпунова, непрерывно дифференцируемых сколь угодно раз. Это требование не вытекает из существа задачи и может быть заменено любым другим, обеспечивающим существование в $\overline{\Omega}$, $t \geqslant 0$

сколь угодно гладкого решения при сколь угодно гладких данных f, u_0, u_1, ψ. Все остальные выводы при этом не изменятся.

3. Для того чтобы решение $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ было ν $(\nu \geqslant 2)$ раз непрерывно дифференцируемым в $\overline{\Omega}$, $t \geqslant 0$, необходимо, чтобы на многообразии S, $t=0$ функции f, u_0, u_1, ψ удовлетворяли ν условиям согласованности

$$\psi\Big|_{t=0} = u_0\Big|_S, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1\Big|_S, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \Delta u_0\Big|_S - f\Big|_{S,\, t=0}, \ \ldots \tag{4}$$

Простые примеры показывают, что эти условия не являются достаточными для существования ν раз непрерывно дифференцируемого решения.

Теорема 1. *Если f, u_0, u_1, ψ имеют непрерывные производные любого порядка и удовлетворяют условиям согласованности любого порядка, то существует решение, имеющее непрерывные производные любого порядка.*

Наметим доказательство теоремы. Пусть $\omega_h(P, Q)$ отлично от нуля лишь для $|P, Q| < h$, имеет непрерывные производные любого порядка во всем пространстве и удовлетворяет условию:

$$\int \omega_h(P, Q)\, d\Omega_Q = 1.$$

Пусть $v_m(P)$ и λ_m^2 $(m = 1, 2, \ldots)$ — все фундаментальные функции и собственные числа уравнения $\Delta v + \lambda^2 v = 0$ при условии $v|_S = 0$. Пусть $v_m(P, h)$ есть усреднение v_m ядром $\omega_h(P, Q)$. Если расстояние P до S более h, то $v_m(P, h)$ убывает быстрее любой отрицательной степени λ_m. Тогда $\omega_h(P, Q) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} v_m(P, h)\, v_m(Q)$ и, кроме того, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_m(P, h)\, v_m(Q)}{\lambda_m} \sin \lambda_m t = G_h(P, Q, t) \tag{5}$$

и ряды, получаемые из него дифференцированием по Q и t, сходятся равномерно, если $Q \in \overline{\Omega}$, $-\infty < t < \infty$. Очевидно, для G_h имеем

$$\Box_{Q,\, t}\, G_h(P, Q, t) = 0, \quad G_h\big|_{Q \in S} = 0, \quad G_h\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial G_h}{\partial t}\Big|_{t=0} = \omega_h(P, Q).$$

Если $u(x, t)$ есть дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи (1), (2), (3), то, применяя формулу Грина к u и $G_h(P, Q, t-\tau)$, найдем

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \lim_{h \to 0} \left\{ \int_{\Omega} \left[u_1\, G_h(P, Q, t) + u_0\, \frac{\partial G_h(P, Q, t)}{\partial t} \right] d\Omega_Q - \right.$$

$$\left. - \int_0^t d\tau \int_S \psi(Q, \tau)\, \frac{\partial G_h(P, Q, t-\tau)}{\partial n_Q}\, dS - \int_0^t d\tau \int_{\Omega} f(Q, \tau)\, G_h(P, Q, t-\tau)\, d\Omega_Q \right\}. \tag{6}$$

Наоборот, если заданные f, u_0, u_1, ψ удовлетворяют условиям теоремы, то доказывается, что (6) дает решение поставленной задачи и имеет непрерывные производные любого порядка.

4. Пусть $u \in W_2^k$ в $(\Omega, [0, t_0])$, где t_0 — любое конечное число. Пусть $k \geqslant 2$. Тогда $u(x, t)$ назовем обобщенным решением задачи (1), (2), (3), если $u(x, t)$ удовлетворяет (1), (2), (3) в том смысле, что встречаю-

щиеся производные понимаются обобщенными ([8]), а граничные и начальные условия в смысле среднего квадратичного, т. е., например, $\int_S (\tilde{u}-\psi)\, dS \to 0$, где $\tilde{u}$ — значение u на параллельной к S поверхности.

Пусть f, u_0, u_1, ψ имеют суммируемые с квадратом обобщенные производные ([8]) соответственно до порядков α, β, $\beta-1$, γ включительно, причем на многообразии S, $t=0$ выполнены почти везде условия согласованности до порядка $\delta \leqslant \min(\alpha, \beta-1, \gamma)$, где $\delta \geqslant 1$.

При этих условиях доказывается

Теорема 2. *Существует единственное обобщенное решение* $u \in W_2^{\delta-1}$.

Сначала u_0, u_1, f продолжаем в область Ω_1, содержащую Ω внутри, так, чтобы они тождественно равнялись нулю вблизи границы Ω_1. После этого апроксимируем u_0, u_1, f, усредняя их гладким ядром. Задав на границе S_1 области Ω_1 $\psi_1 \equiv 0$, получим четверку функций f_h, $(u_0)_h$, $(u_1)_h$, $\psi_1 \equiv 0$, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Так как при $h \to 0$ f_h, $(u_0)_h$, $(u_1)_h$ стремятся в смысле норм (6) статьи ([9]) к f, u_0, u_1 при $k = \min(\alpha, \beta-1)$, то существует функция $u \in W_2^k$, которая, грубо говоря, удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям. Тогда оказывается, что функция $\psi_2 = \psi - v|_S$ допускает апроксимацию гладкими функциями $(\psi_2)_h$ в смысле норм (6) статьи ([9]) для $k = \delta - 1$; кроме того, четверка функций $f \equiv 0$, $u_0 \equiv 0$, $u_1 \equiv 0$, $(\psi_2)_h$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Отсюда на основании теоремы 1 и результатов статьи ([9]) следует существование решения.

Если $\delta - 1 < 2$, то u является решением задачи в смысле следующего пункта 5. На доказательстве единственности не останавливаемся.

Если $\delta - 1 > \frac{n+1}{2}$, то, в силу известного свойства пространства W_2^k, следует: $u \in C^{\delta-2-\left[\frac{n+1}{2}\right]}$. Отсюда $u(x, t)$ будет дважды непрерывно дифференцируемой, если $\delta = 4 + \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

5. Пусть E_ν означает пространство функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)$, имеющих непрерывные производные до порядка ν в $\overline{\Omega}$, $-\infty < t < \infty$, причем каждая $\varphi \in E_\nu$ отлична от нуля лишь в конечном промежутке $[t_1, t_2]_\varphi$, зависящем от φ. Последовательность $\{\varphi_k\}$ называется сходящейся к φ_0 ($\varphi_k \in E_\nu$, $\varphi_1 \in E_\nu$), если φ_k и φ_0 равны нулю вне одного и того же промежутка и φ_k и ее производные до порядка ν сходятся равномерно к φ_0 и ее соответствующим производным. Множество $\varphi \in E_\nu$ таких, что $\varphi|_S = 0$, обозначим $\tilde{E}_\nu$. Если $u(x, t)$ есть дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи (1), (2), (3), то для любой $\varphi \in \tilde{E}_2$ имеем

$$\iint\limits_{t\ \Omega} u \,\square\, \varphi d\Omega\, dt = \iint\limits_{t\ \Omega} \varphi f\, d\Omega\, dt + \iint\limits_{t\ S} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS\, dt - \int\limits_{\Omega, t=0} \left(\varphi u_1 - u_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) d\Omega. \quad (7)$$

Пусть E_ν^* — пространство линейных (аддитивных и непрерывных) функционалов в E_ν, значения которых для $\varphi \in E_\nu$ обозначим (ρ, φ). Будем говорить, что $\rho = 0$ в (t_3, t_4), если $(\rho, \varphi) = 0$ для всякой $\varphi \in E_\nu$, для которой $(t_1, t_2)_\varphi \subset (t_3, t_4)$. Тогда (7) может быть записано в виде

$$(\rho, \square\, \varphi) = (\sigma, \varphi) \quad (\varphi \in E_2,\quad \rho \in E_0^*,\quad \sigma \in E_1^*,\quad \rho = 0,\quad \sigma = 0,\quad t < 0). \quad (8)$$

Пусть теперь задан $\sigma \in E_1^*$ ($\sigma = 0$, $t < 0$). Если $\rho \in E_p^*$ таково, что для него имеет место (8), какова бы ни была $\varphi \in \tilde{E}_2$, то ρ назовем функциональным решением обобщенной предельной задачи.

Теорема 3. *Если* $\sigma \in E_1^*$ $(\sigma = 0,\ t < 0)$, *то существует единственное функциональное решение обобщенной предельной задачи*

$$\rho \in E_p^*, \quad p = 4 + \left[\frac{n+1}{2}\right] \quad (\rho = 0,\ t < 0).$$

Доказательство состоит из следующих частей:

1) Для всякого $\sigma \in E_1$ значение (σ, φ) для $\varphi \in E_2$ можно апроксимировать в виде правой части (7), где f, $u_0 \equiv 0$, $u_1 \equiv 0$, ψ удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть ρ_h соответствующее решение.

Для всякой $\varphi \in E_p$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega} \rho_h \varphi \, d\Omega \, dt$$

имеет конечный предел и, следовательно, как слабый предел функционалов из E_p^* есть функционал из E_p^*.

Поступило
18 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Krzizanski u. J. Schander, Studia Mathematica, 6 (1936). [2] С. Г. Михлин, Тр. Сейсмологическ. ин-та, № 110 (1941). [3] Н. М. Гюнтер, La théorie du potentiel etc., Paris, 1934. [4] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, М.—Л., 1947. [5] В. И. Смирнов, ДАН, 14, № 1; 13, № 2, 69 (1937). [6] Г. И. Петрашень, ДАН, 46, № 7 (1945). [7] Х. Л. Смолицкий, ДАН, 54, № 7 (1946). [8] С. Л. Соболев, Матем. сборн., 4 (46), 3 (1938). [9] Х. Л. Смолицкий, ДАН, 73, № 2 (1950).