Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. А. САПОГОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАУССА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 20 V 1950)

1. Если случайная величина X с нормальной функцией распределения $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}du$ является суммой двух независимых случайных величин $X=X_1+X_2$, то каждая из этих величин X_1 и X_2 в отдельности имеет нормальное распределение ([1]), причем здесь считается нормальным и несобственное распределение. Доказательство теоремы Крамера не позволяет непосредственно сделать заключение о характере распределения независимых слагаемых X_1 и X_2, если их сумма X подчиняется закону Гаусса не точно, а лишь приближенно. Предметом настоящей заметки служит исследование этого вопроса.

Теорема. *Пусть функция распределения $F(x)$ суммы $X=X_1+X_2$ двух независимых случайных величин X_1 и X_2 удовлетворяет условию*

$$|F(x)-\Phi(x)|<\varepsilon, \quad -\infty<x<\infty,$$

где $\varepsilon<1$ — данное положительное число.

Пусть $F_1(x)$ — функция распределения величины X_1 и $a_1=\int\limits_{-N}^{N} x\,dF_1(x)$,

$$\sigma_1^2=\int\limits_{-N}^{N} x^2dF_1(x)-\left(\int\limits_{-N}^{N} x\,dF_1(x)\right)^2>0, \quad N=\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Тогда

$$\left|F_1(x)-\Phi\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)\right|<\frac{C}{\sigma^{4/7}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2/7}}, \quad -\infty<x<\infty,$$

где C — постоянная, не зависимая ни от ε, ни от σ_1 и a_1.

Аналогичное заключение справедливо и для функции распределения $F_2(x)$ величины X_2.

2. Укажем основные этапы доказательства формулированной теоремы. Сначала вместо X_1 и X_2 вводим вспомогательные величины X_1^* и X_2^*, определяемые так:

$$X_1^*=X_1, \text{ если } |X_1|\leqslant\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{и} \quad X_1^*=0, \text{ если } |X_1|>\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}};$$

$X_2^* = X_2$, если $|X_2| \leqslant \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ и $X_2^* = 0$, если $|X_2| > \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$, причем мы предполагаем, что медиана величины X_1 равна нулю. Тогда характеристические функции $f_1^*(z)$, $f_2^*(z)$ величин X_1^*, X_2^* и характеристическая функция $f^*(z)$ их суммы $X_1^* + X_2^* = X^*$ будут функциями целыми.

Устанавливается, что $\varphi_1(z) = \ln f_1^*(z)$ будет функцией регулярной при $|z| \leqslant T = \frac{1}{8}\sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$, а также, что

$$\frac{1}{6} e^{-3|z| - |z^2|} \leqslant |f_1^*(z)| \leqslant 3e^{3|z| + {}^1/_2 |z^2|}, \quad |z| \leqslant T,$$

если только ε достаточно мало.

Эти неравенства позволяют заключить, что

$$\left|\varphi_1(z) - ia_1 z + \frac{1}{2}\sigma_1^2 z^2\right| < \sqrt[7]{\frac{C}{\sigma_1^6\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}}$$

при $|z| \leqslant \sqrt[7]{\frac{(\ln 1/\varepsilon)^2}{8^4 \sigma_1}}$, где C — постоянная. Но $\exp\left(ia_1 z - \frac{1}{2}\sigma_1^2 z^2\right)$ — характеристическая функция нормального распределения $\Phi\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)$. Следовательно функция распределения величины X_1^* уклоняется от этого нормального распределения (равномерно) достаточно мало, если ε мало.

Переходя от величины X_1^* к величине X_1, получаем заключение теоремы.

Поступило
7 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Cramer, Math. Zs., 41, 405 (1936).