Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 3

*МАТЕМАТИКА*

С. НИКОЛЬСКИЙ

# К УСЛОВИЮ ДИНИ — ЛИПШИЦА СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ

*(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 22 V 1950)*

Пусть $f(x)$ — непрерывная на некотором интервале функция и

$$\omega(t) = \sup_{|x'-x''|<t} |f(x') - f(x'')|$$

ее модуль колебания. Нетрудно видеть, что $\omega(t)$ удовлетворяет следующему условию: при $t=0$ она непрерывна и равна нулю и при $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$

$$0 \leqslant \omega(t_2) - \omega(t_1) \leqslant \omega(t_2 - t_1). \tag{1}$$

И это все, что можно сказать о модуле колебания непрерывной функции, так как модуль колебания функции $\omega(t)$, удовлетворяющей (1), есть она сама.

Пусть, далее, $H_\omega$ обозначает класс функций периода $2\pi$, удовлетворяющих условию

$$|f(t') - f(t'')| \leqslant \omega(|t' - t''|). \tag{2}$$

Хорошо известно, что если $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию Дини — Липшица

$$\omega(\delta) \ln \frac{1}{\delta} \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0, \tag{3}$$

то ряд Фурье всякой функции, принадлежащей к $H_\omega$, равномерно сходится к ней.

В этой заметке я хочу получить, как следствие из моего прежнего результата [1], что условие (3) является в известном смысле необходимым для сходимости ряда Фурье. Именно, если (3) не выполняется, то в классе $H_\omega$ найдется функция, ряд Фурье которой расходится, причем, если

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n \to \infty \quad (n \to \infty), \tag{4}$$

то можно указать функцию $f \in H_\omega$, ряд Фурье которой расходится неограниченно.

В заметке [1] было показано, что для любой функции $f \in H_\omega$ отклонение от нее ее суммы $s_n(f, x)$ порядка $n$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x) - s_n(f, x)| \leqslant R_n + O(\omega(h^{(n)})) \quad \left(h^{(n)} = \frac{2\pi}{2n+1}\right), \tag{5}$$

где

$$R_n = \frac{2\lg n}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{4z}{2n+1}\right) \sin z\,dz,$$

причем четная периода $2\pi$ функций, определяемая на $(0, \pi)$ равенствами

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant t_1 \qquad t_\nu = \nu h^{(n)}; \\ \dfrac{(-1)^\nu \omega(2(t-t_\nu))}{2}, & t_\nu \leqslant t_\nu \leqslant t_{\nu+1/2} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n); \\ \dfrac{(-1)^{\nu-1} \omega(2(t_\nu - t))}{2}, & t_{\nu-1/2} \leqslant t \leqslant t_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

обращает неравенство (5) в равенство

$$s_n(f_n, 0) - f_n(0) = s_n(f_n, 0) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi D_n(t) f_n(t)\,dt = R_n + O(\omega(h^{(n)})). \quad (6)$$

Здесь

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin(t/2)}.$$

Если $\omega(t)$ — выпуклая функция, то $f_n \in H_\omega$, а если она только удовлетворяет условию (1), то во всяком случае $1/2\, f_n \in H_\omega$.

Пусть теперь условие Дини — Липшица не выполняется. Тогда

$$\ln n_k \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) > \eta > 0$$

для некоторой подпоследовательности натуральных чисел

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \quad (7)$$

и

$$\ln n_k \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{4z}{2n+1}\right) \sin z\,dz > c_1 \ln n_k \int\limits_{\frac{2n_k+1}{4n_k}}^{\pi/2} z\,\omega\left(\frac{4z}{2n_k+1}\right) dz >$$

$$> c_1 \ln n_k \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \int\limits_{\frac{2n_k+1}{4n_k}}^{\pi/2} z\,dz > c \ln n_k \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) > c\eta > 0.$$

Следовательно, в силу (5) и (6), будем иметь

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi D_{n_k}(t) f_{n_k}(t)\,dt > \lambda > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \quad (8)$$

Определим теперь по индукции последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \ldots$, принадлежащих к (7), а также функцию $\varphi(x)$ на интервале $(0, \pi)$ следующим образом.

Положим $m_1 = n_1$ и пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ уже определены. Положим $\alpha_i = h^{(m_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Очевидно, $0 < \alpha_k < \alpha_{k-1} < \ldots < \alpha_1 < \alpha_0 = \pi$. Тогда $\alpha_i$ есть нуль функции $f_{m_i}(x)$, непосредственно справа от него $f_{m_i}(x)$ отрицательна. Пусть еще $\alpha_i^*$ есть ближайший слева от $\alpha_i$ нуль

$f_{m_{i+1}}(x)$ такой, что непосредственно слева от него $f_{m_{i-1}}(x)$ положительна. Положим пока на интервале $\alpha_k \leqslant t \leqslant \alpha_0 = \pi$

$$\varphi(t) = \begin{cases} {}^1/_2\, f_{n_i}(t), & \alpha_i \leqslant t \leqslant \alpha^*_{i-1}; \\ 0, & \alpha^*_{i-1} \leqslant t \leqslant \alpha_{i-1}. \end{cases} \tag{9}$$

Подберем теперь $m_{k+1}$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $m_{k+1} > m_k$ и $m_{k+1}$ принадлежит к (7);

2) $$\frac{2}{\pi}\int\limits_{\alpha_k}^{\pi} D_{m_{k+1}}(t)\,\varphi(t)\,dt < \frac{1}{2^k};$$

это возможно, так как

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\alpha_k}^{\pi} D_n(t)\,\varphi(t)\,dt = 0;$$

3) $$\int\limits_{0}^{\alpha^*_k} D_{m_{k+1}}(t)\, f_{m_{k+1}}(t)\,dt > \lambda;$$

это также возможно вследствие (8) и того обстоятельства, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{\alpha_k(n)} D_n(t)\, f_n(t)\,dt = 0,$$

где $\alpha_k(n)$ есть ближайший слева от $\alpha_k$ нуль функции $D_n(t)$ такой, что непосредственно слева от него $D_n(t) > 0$.

Определенная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (2) на интервале $(0, \pi)$. Действительно, на отдельных интервалах $(\alpha_k, \alpha_{k-1})$, она, как мы знаем, ему удовлетворяет. Допустим, что условие (2) выполняется на $(\alpha_k, \pi)$ и пусть $x' \in (\alpha_{k+1}, \alpha_k)$, a $x'' \in (\alpha_k, \pi)$. Пусть, например, $0 < \varphi(x') < \varphi(x'')$; так как $x' < \alpha_k < x''$ и $\varphi(\alpha_k) = 0$, то существует $x'_* \in (\alpha_k, \pi)$ так, что $\varphi(x') = \varphi(x'_*)$ и

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| = |\varphi(x'') - \varphi(x'_*)| \leqslant \omega(x'' - x'_*) \leqslant \omega(x'' - x').$$

Так же доказывается и в других случаях, когда $\varphi(x')$ и $\varphi(x'')$ имеют одинаковые знаки. Если они имеют разные знаки, то достаточно, очевидно, показать, что (2) выполняется на наибольшем содержащем $\alpha_k$ отрезке $(a, b)$, где $\varphi(t)$ монотонна. Из конструкции $\varphi(t)$ видно, что можно указать точки $c$ и $d$, удовлетворяющие неравенствам $a < c < \alpha_k < d < b$, такие, что

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega(\overline{2c - t})}{4}, & a \leqslant t \leqslant c; \\ 0, & c \leqslant t \leqslant d; \\ -\dfrac{\omega(\overline{2t - a})}{4}, & d \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Если теперь $x' \in (a, c)$ и $x'' \in (d, b)$, то

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = \frac{\omega(\overline{2c - x'})}{4} + \frac{\omega(\overline{2x'' - d})}{4} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega(\overline{2x'' - d} + \overline{2c - x'})}{2} \leqslant \frac{\omega(\overline{2x'' - x'})}{2} \leqslant \omega(x'' - x').$$

Если продолжить функцию $\varphi(t)$ так, чтобы $\varphi(0) = 0$ и она была четной периода $2\pi$, то $\varphi \in H_\omega$. При этом, очевидно:

$$|s_{m_{k+1}}(\varphi, 0) - \varphi(0)| = |s_{m_{k+1}}(\varphi, 0)| = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi D_{m_{k+1}}\varphi\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\overset{*}{\alpha}_k} + \int\limits_{\overset{*}{\alpha}_k}^{\alpha_k} + \int\limits_{\alpha_k}^{\pi}\right) > \frac{2}{\pi}\left(\lambda + 0 - \frac{1}{2^k}\right),$$

и ряд Фурье $\varphi(t)$ расходится.

Для конструкции функции $\varphi$, ряд Фурье которой в случае (4) неограниченно расходится, надо было бы рассуждения несколько видоизменить, считая $\lambda$ зависящим от $n_k$ и стремящимся к бесконечности.

Из наших рассуждений вытекает еще такое.

Следствие. Если ряды Фурье всех функций $f$, принадлежащих к данному классу $H_\omega$, сходятся к $f$ в точке $x = 0$ или в какой-либо другой точке, то они необходимо равномерно сходятся на вещественной оси.

Рассуждая аналогично, можно было бы показать, что для любого (без всяких ограничений) модуля $\omega(\delta)$ колебания существует функция $f \in H_\omega$ такая, что

$$f(0) = 0, \quad |s_n(f, 0)| > c\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\lg n$$

для некоторой подпоследовательности натуральных чисел, откуда, вследствие известного неравенства

$$|f(0) - s_n(f, 0)| \leqslant c_1 \lg n\, E_n(f),$$

следует, что для этой функции

$$E_n(f) > \frac{c}{c_1}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

для некоторой подпоследовательности $n$.

Поступило
14 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Никольский, ДАН, 52, 191 (1946).