Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ В ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ — СТИЛЬТЬЕСА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 V 1950)

В настоящей заметке дано необходимое и достаточное условие для представимости непрерывной, четной функции $f(x)$ в виде $(p \geqslant -1/2)$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} j_p(\sqrt{\lambda}\, x)\, d\sigma(\lambda), \tag{1}$$

где $\sigma(\lambda)$ — монотонная, ограниченная функция и

$$j_p(\sqrt{\lambda}\, x) = \frac{2^p\,\Gamma(p+1)}{(x\sqrt{\lambda})^p} J_p(\sqrt{\lambda}\, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+k+1)} \lambda^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Легко видеть, что $j_p(\sqrt{\lambda}\, x)$ есть решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

1. Пусть $f(x)$ — четная функция, имеющая для всех действительных x непрерывную вторую производную. Можно показать [1], что функция

$$T_y^x f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(p+1/2)} \int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi})\sin^{2p}\varphi\, d\varphi$$

есть решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2p+1}{y}\frac{\partial u}{\partial y},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{y=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0.$$

В частности,

$$T_x^y j_p(\sqrt{\lambda}\, x) = j_p(\sqrt{\lambda}\, x)\, j_p(\sqrt{\lambda}\, y).$$

2. Пусть $f(t)$ — непрерывная четная функция. Положим

$$g(x) = B_x\{f(t)\} = \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+{}^1/_2)}\int\limits_0^{\pi} f(x\sin\theta)\cos^{2p}\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+{}^1/_2)}\frac{1}{x^{2p}}\int\limits_0^{x} (x^2-\rho^2)^{p-{}^1/_2} f(\rho)\, d\rho. \qquad (2)$$

B_x суть классические операторы Пуассона. Легко показать (разлагая $\cos\sqrt{\lambda}t$ в ряд Маклорена), что

$$B_x\{\cos\sqrt{\lambda}t\} = j_p(\sqrt{\lambda}x).$$

Нам понадобятся также операторы, обратные операторам Пуассона. Из формулы (2) следует, что обратные операторы могут быть определены на функциях, дифференцируемых по крайней мере $[p+{}^1/_2]$ раз*.

Сделаем это предположение и положим $[p+{}^1/_2] = k$, $x^{2p}g(x) = h(x)$, $\frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)/\Gamma(p+{}^1/_2) = C_p$, $\frac{1}{x}\frac{d}{dx} = D$. Применяя к функции $h(x)$ k раз оператор D, мы получим

$$\varphi(x) = D^k h(x) =$$

$$= (2p-1)(2p-3)\ldots(2p-2k+1)\, C_p \int\limits_0^{x} (x^2-\rho^2)^{p-k-{}^1/_2} f(\rho)\, d\rho. \qquad (3)$$

Уравнение (3) есть обобщенное уравнение Абеля ([2]). Если предположить, что функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную, то, как известно ([2]), уравнение (3) может быть сведено к уравнению Вольтерра второго рода, которое дает возможность выразить функцию $f(\rho)$ в виде

$$f(\rho) = \int\limits_0^{\rho} \varphi'(t)\,\Gamma(\rho, t)\, dt = A_\rho\{g(t)\}, \qquad (4)$$

где $\Gamma(\rho, t)$ строится по резольвенте упоминавшегося уравнения Вольтерра. Итак, формула (4) определяет операторы, обратные операторам Пуассона, для $(k+1)$ раз дифференцируемых функций.

3. Пусть $f(x)$ — непрерывная четная функция, обладающая тем свойством, что для произвольных действительных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и произвольных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{\mu, \nu=1}^{n} T_{x_\mu}^{x_\nu} f(x)\, \xi_\mu \xi_\nu \geqslant 0. \qquad (5)$$

Из неравенства (5) легко следует для любой непрерывной, равной нулю вне конечного интервала функции $h(x)$ неравенство

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} T_x^y f(x)\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy \geqslant 0. \qquad (5')$$

* Через $[\alpha]$ $(\alpha > 0)$ мы обозначаем целую часть числа α.

Наоборот, из неравенства (5′) легко получить в случае непрерывности функции $f(x)$ неравенство (5).

Допустим, что $f(x)$ имеет непрерывную $(k+1)$-ю производную. В этом случае к $f(x)$ применимы операторы A_ρ и, следовательно, можно воспользоваться методом, изложенным в нашей работе ([3]), и получить для $f(x)$ представление (1).

4. Покажем теперь, как избавиться от предположения дифференцируемости $f(x)$. Пусть $\varphi_n(x)$ $(x \geqslant 0)$ — последовательность функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\varphi_n(x) \geqslant 0$, причем вне интервала $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ $\varphi_n(x) = 0$;

2) $\int\limits_0^\infty \varphi_n(x)\, x^{2p+1}\, dx = 1$;

3) $\varphi_n(x)$ имеет непрерывную $(k+1)$-ю производную.

Положим

$$\psi_n(x) = \int\limits_0^\infty T_x^y \varphi_n(x)\, \varphi_n(y)\, y^{2p+1}\, dy,$$

$$f_n(x) = \int\limits_0^\infty T_x^z \psi_n(x)\, f(z)\, z^{2p+1}\, dz.$$

Из формулы для $T_x^y \varphi_n(x)$ легко следует, что если y заключается в интервале $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, то $T_x^y \varphi_n(x)$ обращается в нуль вне интервала $\left(0, \frac{2}{n}\right)$. Отсюда следует, что функция $\psi_n(x)$ также обращается в нуль вне интервала $\left(0, \frac{2}{n}\right)$ и, значит, функция $f_n(x)$ определена и непрерывна. Легко также видеть, что $f_n(x)$ имеет непрерывную $(k+1)$-ю производную.

Пользуясь самосопряженностью операторов T^y относительно скалярного произведения с весом x^{2p+1}, а также переместительностью этих операторов (эти свойства могут быть доказаны примерно так же, как в нашей работе ([3])), можно показать положительную определенность функции $f_n(x)$ в смысле неравенства (5′) (а значит, и в смысле неравенства (5)). Следовательно, в силу предыдущего,

$$f_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} j_p(\sqrt{\lambda}\, x)\, d\sigma_n(\lambda).$$

Если $n \to \infty$, то, как легко видеть, $f_n(x)$ сходятся к $f(x)$ равномерно в каждом конечном интервале. Можно показать, что отсюда следует сходимость в основном функций $\sigma_n(\lambda)$ к монотонной ограниченной функции $\sigma(\lambda)$ и представление (1) для $f(x)$.

Итак, имеет место следующая теорема*:

Теорема. *Для того чтобы непрерывная четная функция* $f(x)$ *допускала представление в виде* (1), *необходимо и достаточно, чтобы для произвольных действительных чисел* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *и произвольных точек* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *имело место неравенство* (5).

Заметим, что после того как разложение (1) уже получено, можно показать (пользуясь асимптотической формулой для функций Бесселя), что $f(x)$ дифференцируема, по крайней мере, k раз.

---

* М. Г. Крейн сообщил мне, что эта теорема была им доказана несколько лет назад другим методом, но не опубликована.

5. Из оценки роста функций $j_p(\sqrt{\lambda}\,x)$ для мнимых λ следует, что для ограниченных функций $f(x)$ (положительно определенных в смысле неравенства (5)) имеет место представление

$$f(x) = \int_0^\infty j_p(\sqrt{\lambda}\,x)\,d\sigma(\lambda). \tag{6}$$

Из формулы обращения Фурье — Ганкеля легко следует единственность представления (6). В случае, когда $2p$ — целое число, представление (6) было ранее уже получено Шенбергом (4) из других соображений.

Поступило
11 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Delsartes, Journ. de Math. pures et appl., **17**, 3, 213 (1938). [2] Э. Гурса, Курс математического анализа, **3**, ч. II, 1934. [3] Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, **4**, в. 1 (1949). [4] I. J. Shoenberg, Ann. of Math., **39**, № 4, 811 (1938).