Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ЛЕБЕДЕВ

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 27 V 1950)

В настоящей заметке выводятся некоторые интегральные представления для произведений сферических функций, которые оказываются полезными в различных приложениях, в частности, встречаются в теории интегрального преобразования Мелера — Фока [1].

Важнейшее из этих интегральных представлений дается формулой

$$(-1)^m \pi \operatorname{tg}(n + {}^1/_2)\, \pi P_n^m(\operatorname{ch}\alpha) P_n^{-m}(\operatorname{ch}\alpha') \sqrt{\operatorname{sh}\alpha} \sqrt{\operatorname{sh}\alpha'} =$$

$$= \int\limits_{|\alpha-\alpha'|}^{\alpha+\alpha'} P_{m-{}^1/_2}\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha' - \operatorname{ch}\psi}{\operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha'}\right) \operatorname{sh}(n + {}^1/_2)\psi \, d\psi +$$

$$+ \frac{2}{\pi}(-1)^m \int\limits_{\alpha+\alpha'}^{\infty} Q_{m-{}^1/_2}\left(\frac{\operatorname{ch}\psi - \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha'}\right) \operatorname{sh}(n + {}^1/_2)\psi \, d\psi, \qquad (1)$$

где $P_n^m(z)$ и $Q_n^m(z)$, присоединенные сферические функции Лежандра первого и второго рода, $-1 < \operatorname{Re} n < 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$.

Аналогичное представление для произведения, содержащего функцию второго рода, имеет вид:

$$(-1)^m \pi Q_n^m(\operatorname{ch}\alpha) P_n^{-m}(\operatorname{ch}\alpha') \sqrt{\operatorname{sh}\alpha} \sqrt{\operatorname{sh}\alpha'} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{|\alpha-\alpha'|}^{\alpha+\alpha'} P_{m-{}^1/_2}\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha' - \operatorname{ch}\psi}{\operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha'}\right) e^{-(n+{}^1/_2)\psi} \, d\psi +$$

$$+ \frac{(-1)^m}{\pi} \int\limits_{\alpha+\alpha'}^{\infty} Q_{m-{}^1/_2}\left(\frac{\operatorname{ch}\psi - \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha'}\right) e^{-(n+{}^1/_2)\psi} \, d\psi, \qquad (2)$$

где $-1 < \operatorname{Re} n < 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots, \alpha \geqslant \alpha' > 0$.

Для произведения функций первого рода существует также более простая формула, содержащая одну квадратуру:

$$(-1)^m \pi P_n^m(\operatorname{ch}\alpha) P_n^{-m}(\operatorname{ch}\alpha') \sqrt{\operatorname{sh}\alpha} \sqrt{\operatorname{sh}\alpha'} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cos(n + {}^1/_2)\pi \int_0^\infty Q_{m-{}^1/_2}\left(\frac{\operatorname{ch}\psi + \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha'}\right) \operatorname{ch}(n + {}^1/_2)\psi \, d\psi, \qquad (3)$$

справедливая при тех же ограничениях, как и формула (1).

Значение формул (1) — (3), которые являются, повидимому, новыми, заключается главным образом в том, что рассматриваемые интегральные представления содержат параметр n под знаком элементарных функций. В приложениях к математической физике наибольшее значение имеет случай $n = -{}^1/_2 + i\tau$, τ — произвольное вещественное число. Формулы (1) — (3) оказываются удобными для вычисления или преобразования интегралов по значку τ, содержащих рассматриваемые произведения сферических функций*.

Для доказательства формулы (1) воспользуемся теоремой сложения для сферических функций ([2], стр. 364)

$$P_n(\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha' - \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha' \cos\varphi) =$$

$$= P_n(\operatorname{ch}\alpha) P_n(\operatorname{ch}\alpha') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m P_n^m(\operatorname{ch}\alpha) P_n^{-m}(\operatorname{ch}\alpha') \cos m\varphi, \qquad (4)$$

$$\alpha > 0, \quad \alpha' > 0,$$

откуда следует

$$(-1)^m P_n^m(\operatorname{ch}\alpha) P_n^{-m}(\operatorname{ch}\alpha') = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_n(\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha' - \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha' \cos\varphi) \cos m\varphi \, d\varphi. \quad (5)$$

Вводя новое переменное интегрирования t подстановкой $\operatorname{ch} t = \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha' - \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha' \cos\varphi$ и заменяя функцию Лежандра интегральным представлением ([2], стр. 272)

$$P_n(\operatorname{ch} t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{ctg}(n + {}^1/_2)\pi \int_t^\infty \frac{\operatorname{sh}(n + {}^1/_2)\psi}{\sqrt{2\operatorname{ch}\psi - 2\operatorname{ch} t}} d\psi, \quad -1 < \operatorname{Re} n < 0, \qquad (6)$$

получаем:

$$(-1)^m \pi \operatorname{tg}(n + {}^1/_2)\pi P_n^m(\operatorname{ch}\alpha) P_n^{-m}(\operatorname{ch}\alpha') =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{|\alpha-\alpha'|}^{\alpha+\alpha'} \frac{\cos\left(m \arccos \dfrac{\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\alpha' - \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\alpha'}\right) \operatorname{sh} t \, dt}{\sqrt{[\operatorname{ch} t - \operatorname{ch}(\alpha - \alpha')][\operatorname{ch}(\alpha + \alpha') - \operatorname{ch} t]}} \int_t^\infty \frac{\operatorname{sh}(n + {}^1/_2)\psi \, d\psi}{\sqrt{2\operatorname{ch}\psi - 2\operatorname{ch} t}}.$$

Изменяя порядок интегрирования ** и возвращаясь к переменной φ,

---

* Интегралы этого типа играют существенную роль в теории интегрального преобразования Мелера — Фока и различных приложениях этого преобразования к задачам математической физики.

** Законность изменения порядка интегрирования следует из абсолютной сходимости двойного интеграла.

находим

$$(-1)^m \pi \operatorname{tg}(n+{}^1/_2)\pi P_n^m(\operatorname{ch}\alpha) P_n^{-m}(\operatorname{ch}\alpha')\sqrt{\operatorname{sh}\alpha}\sqrt{\operatorname{sh}\alpha'} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{|\alpha-\alpha'|}^{\alpha+\alpha'} \operatorname{sh}(n+{}^1/_2)\psi\, d\psi \int\limits_0^{\arccos\frac{\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\alpha'-\operatorname{ch}\psi}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\alpha'}} \frac{\cos m\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi - 2\dfrac{\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\alpha'-\operatorname{ch}\psi}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\alpha'}}}\, d\varphi +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int\limits_{\alpha+\alpha'}^{\infty} \operatorname{sh}(n+{}^1/_2)\psi\, d\psi \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos m\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi + 2\dfrac{\operatorname{ch}\psi-\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\alpha'}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\alpha'}}}\, d\varphi.$$

Искомый результат (1) следует теперь из известных интегральных представлений для сферических функций (([2]), стр. 267, ([3]), стр. 524)

$$P_{m-{}^1/_2}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\theta} \frac{\cos m\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi - 2\cos\theta}}\, d\varphi,$$

$$Q_{m-{}^1/_2}(\operatorname{ch}\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos m\varphi}{\sqrt{2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\varphi}}\, d\varphi, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Интегральное представление (2) получается совершенно аналогичным образом, если вместо равенства (4) воспользоваться соответствующей теоремой сложения для функции второго рода (([2]), стр. 378):

$$Q_n(\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\alpha' - \operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\alpha'\cos\varphi) =$$

$$= Q_n(\operatorname{ch}\alpha) P_n(\operatorname{ch}\alpha') + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m Q_n^m(\operatorname{ch}\alpha) P_n^{-m}(\operatorname{ch}\alpha')\cos m\varphi, \tag{8}$$

$$\alpha \geqslant \alpha' > 0, \quad \operatorname{Re} n > -1.$$

Формула (3) выводится из равенства (5) путем замены сферической функции интегральным представлением (([2]), стр. 272):

$$P_n(\operatorname{ch} t) = \frac{2}{\pi}\cos(n+{}^1/_2)\pi \int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(n+{}^1/_2)\psi}{\sqrt{2\operatorname{ch}\psi + 2\operatorname{ch} t}}\, d\psi \tag{9}$$

вместо интегрального представления (6), использованного при выводе формулы (1).

Ленинградский физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступило
9 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Лебедев, ДАН, 68, № 3 (1949). [2] E. W. Hobson, The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge, 1931. [3] E. W. Hobson, Phil. Trans. Roy. Soc. (A), 187, 443 (1896).