Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. Г. КРЕЙН

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ А. М. ЛЯПУНОВА О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 V 1950)

1. В настоящей заметке изучается система из $n=2m$ дифференциальных уравнений, которая в векторно-матричных обозначениях может быть записана в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt}=\lambda JH(t)\,x, \tag{1}$$

где $x=x(t)$ — n-мерная вектор-функция; λ — некоторый параметр; $H(t)=\|h_{jk}(t)\|_1^n$ — вещественная симметрическая матрица, элементы которой суть суммируемые периодические функции „времени“ t: $H(t+\omega)=H(t)$ $(-\infty<t<\infty)$, а

$$J=\begin{pmatrix}0 & I_m\\ -I_m & 0\end{pmatrix},\quad I_m=\begin{Vmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{Vmatrix}.$$

Вид (1) имеет всякая система канонических уравнений механической системы с m степенями свободы в том случае, когда гамильтониан этой системы является квадратичной формой от обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_m$ и обобщенных импульсов $p_1, p_2, \ldots, p_m$ с коэффициентами — периодическими функциями t, при этом $x=(q_1,\ldots,q_m, p_1,\ldots,p_m)$, а λ можно считать равным единице.

В системе (1) приводится всякая система дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda^2P(t)\,y=0, \tag{2}$$

где $y=y(t)$ — m-мерная вектор-функция, а $P(t)=P(t+\omega)$ — симметрическая матрица-функция.

А именно, если обозначить через x прямую сумму векторов y и $\lambda^{-1}dy/dt$, то вектор $x=(y, \lambda^{-1}dy/dt)$, в силу (2), будет удовлетворять уравнению (1), в котором матрица $H(t)$ есть прямая сумма матриц $P(t)$ и I_m.

Пусть $U=\|u_{jk}(t;\lambda)\|_1^n$ — матрица-функция, являющаяся решением следующей системы:

$$\frac{dU}{dt}=\lambda JHU,\quad U(0;\lambda)=I_n.$$

По известной теореме Ляпунова — Пуанкаре (см. ([1]), стр. 226) характеристический полином $\det(U(\omega; \lambda) - \rho I_n)$ матрицы монодромии $U(\omega; \lambda)$ является возвратным. Его корни $\rho_1(\lambda), \ldots, \rho_n(\lambda)$ называются мультипликаторами.

Все решения уравнения (1) при данном λ будут ограничены в интервале $(0, \infty)$ в том и только том случае, если при этом λ все мультипликаторы по модулю равны 1 и все элементарные делители матрицы монодромии линейны.

Открытый интервал (α, β) $(-\infty \leqslant \alpha, \beta \leqslant \infty)$ вещественной оси называется зоной устойчивости, если для всех значений λ из этого интервала все решения уравнения (1) ограничены и никакой больший интервал, содержащий (α, β), этим свойством не обладает.

Задача об определении зон устойчивости уравнения (1) играет важную роль в различных вопросах механики и радиотехники (в вопросах параметрического резонанса, динамической устойчивости и др.).

Для случая скалярного уравнения (2) основные результаты о существовании зон устойчивости, их расположении, а также методах их определения были получены А. М. Ляпуновым ([1-6]). Несмотря на важность задачи обобщения всех этих замечательных исследований А. М. Ляпунова на случай векторных уравнений, нам неизвестно ничего существенного по этому вопросу, кроме того, что было указано в ([1]) самим А. М. Ляпуновым.

Здесь приводятся некоторые результаты наших исследований в этом направлении.

2. В дальнейшем, не оговаривая этого, мы будем предполагать выполненным условие:

А. Для любого t форма

$$(H(t)\xi, \xi) = \sum_{1}^{n} h_{jk}(t)\,\xi_k\,\xi_j \qquad (\xi \neq 0) \tag{3}$$

неотрицательна, а ее среднее по аргументу t в интервале $(0, \omega)$ положительно.

В этом предположении теорема Ляпунова — Пуанкаре может быть дополнена следующим предложением.

Теорема 1. *При любом невещественном λ m мультипликаторов уравнения* (1) *лежат внутри единичного круга, а другие m — вне его.*

Будем рассматривать значения λ из верхней полуплоскости: $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. Мультипликатор $\rho(\lambda)$ будем называть мультипликатором первого или второго рода в зависимости от того, лежит ли он внутри единичного круга или вне. Пусть a — какая-либо точка верхней плоскости, в некоторой окрестности которой мультипликаторы первого рода $\rho_1(\lambda), \rho_2(\lambda), \ldots, \rho_m(\lambda)$ могут быть определены как однозначные аналитические функции. Пусть один из этих мультипликаторов $\rho(\lambda)$, будучи аналитически продолжен по пути, ведущему из точки a в некоторую вещественную точку α, не являющуюся точкой разветвления, попал на единичную окружность $|\rho(\alpha)| = 1$. Так как при отображении $\lambda \to \rho(\lambda)$ верхняя полуокружность точки α переходит во внешнюю часть единичного круга, то $\rho'(\alpha) \neq 0$, и, если комплексное число $\rho'(\alpha)$ изобразить вектором с началом в точке $\rho(\alpha)$, то этот вектор будет касаться единичной окружности и будет направлен против часовой стрелки $(i\rho'(\alpha)/\rho(\alpha) < 0)$. Мы приходим к следующей простой и важной теореме.

Теорема 2. *Если при возрастании параметра λ от вещественного α до некоторого $\beta > \alpha$ какой-либо мультипликатор первого рода движется по единичной окружности, то его движение происходит монотонно против часовой стрелки.*

3. Рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda JH(t)\,x, \quad x(0) = -x(\omega). \tag{4}$$

В силу теоремы 1 характеристические числа этой задачи вещественны. Можно показать, что среди них всегда имеются положительные; пусть Λ_0 — наименьшее из них.

Нетрудно показать, что

$$\Lambda_0 > 2\left(\int_0^\omega \eta(t)\,dt\right)^{-1},$$

где $\eta(t)$ — наибольшее из характеристических чисел матрицы $H(t)$.

После ряда довольно тонких рассуждений относительно того, что происходит при встрече мультипликаторов одного и того же рода или различных родов в их движении по единичной окружности, удается установить теорему:

Теорема 3. *Интервал* $0 < \lambda < \lambda_0$ *принадлежит зоне устойчивости уравнения* (1).

4. Если уравнение (1) получено указанным в п. 1 преобразованием из уравнения (2), то число Λ_0^2 будет наименьшим характеристическим числом краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu P(t)\,y = 0; \quad y(0) = -y(\omega), \quad y'(0) = -y'(\omega). \tag{5}$$

Пусть $y_0(t) \not\equiv 0$ — некоторое решение этой системы при $\mu = \Lambda_0^2$. Оно, очевидно, обладает свойством $y_0(t+\omega) = -y_0(t)$ $(-\infty < t < \infty)$. Положим

$$R = \max|y_0(t)|, \quad V = \max|y_0'(t)|.$$

Поясним, что, если $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — вектор, то $|u|$ обозначает его евклидову длину.

Длина L дуги $y = y_0(t)$ $(\tau \leqslant t \leqslant \tau + \omega)$ в m-мерном пространстве, очевидно, не зависит от выбора числа τ. С другой стороны, она не меньше, чем расстояние между ее началом $y_0(\tau)$ и ее концом $y_0(\tau+\omega) = -y_0(\tau)$.

Отсюда

$$2R \leqslant L = \int_0^\omega \left|\frac{dy_0}{dt}\right| dt \leqslant V\omega. \tag{6}$$

Пусть теперь τ выбрано так, что $V = |y'(\tau)|$. Интегрируя обе части уравнения (5) в пределах от τ до $\tau + \omega$, найдем

$$2V = 2|y'(\tau)| = \Lambda_0^2 \left|\int_\tau^{\tau+\omega} P(t)\,y(t)\,dt\right| \leqslant \Lambda_0^2 R \int_\tau^{\tau+\omega} \pi(t)\,dt, \tag{7}$$

где $\pi(t)$ — наибольшее характеристическое число матрицы $P(t)$.

Сопоставляя (6) и (7), мы получаем нижнюю оценку для Λ_0^2, откуда:

Теорема 4. *Если симметрическая матрица* $P(t)$ *удовлетворяет условию* А, *то при*

$$0 < \lambda^2 < \frac{4}{\omega}\Big(\int_0^\omega \pi(t)\,dt$$

все решения уравнения (2) *ограничены.*

Для случая $m=1$ теорема 4 в точности совпадает с известной теоремой А. М. Ляпунова (см. ([1]), стр. 217).

Теорему 4 можно доказать при более широких условиях относительно матрицы $P(t)$, так чтобы она охватывала и недавнее обобщение теоремы А. М. Ляпунова, полученное для скалярного уравнения (2) Боргом ([7]).

5. При $m=1$ $(n=2)$ система (1) будет иметь два мультипликатора: один $\rho(\lambda)$ — первого рода и второй $\rho^{-1}(\lambda)$ — второго рода $(\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0)$. Исследование их движения при λ, меняющемся от 0 до ∞, приводит к таким неравенствам:

$$0<\Lambda_0 \leqslant \Lambda_1 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \Lambda_2 \leqslant \Lambda_3 < \lambda_3 \leqslant \lambda_4 < \ldots \tag{8}$$

Здесь $\Lambda_0 \leqslant \Lambda_1 < \Lambda_2 \leqslant \Lambda_3 < \ldots$ — положительные характеристические числа краевой задачи (4), а $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \lambda_3 \leqslant \lambda_4 < \ldots$ — положительные характеристические числа краевой задачи:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda JHx, \quad x(0) = x(\omega). \tag{9}$$

Для случая скалярного уравнения (2) неравенства (8) впервые были установлены А. М. Ляпуновым ([4]), который к ним пришел другим путем.

При $n=2$ для уравнения (1) можно сформулировать теорему, более полную, чем теорема 2.

Теорема 5. *При непрерывном возрастании* λ *от* Λ_{2k+1} *до* λ_{2k-1} (*от* λ_{2k} *до* Λ_{2k}) *мультипликатор* $\rho(\lambda)$ *движется против часовой стрелки по полуокружности от* -1 *до* 1 (*от* 1 *до* -1).

Для случая скалярного уравнения (2) теорема другим методом была установлена Путнэм.

Аналогичное теореме 5 утверждение можно высказать и в отношении отрицательных характеристических чисел краевых проблем (4) и (8).

Для случая $n=2m>2$ нам удалось доказать существование бесконечного числа зон устойчивости уравнения (1), уходящих в обе стороны на бесконечность, только в предположении, что матрица $H(t)$ дважды непрерывно дифференцируема и что все ее характеристические числа положительны и различны при любом t.

При более общих предположениях вопрос остается открытым.

Поступило
22 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Л. — М., 1935. [2] А. М. Ляпунов, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, сер. 2, **5**, № 3, 4, 5, 6 (1896). [3] А. М. Ляпунов, C. R., **123**, 1248 (1896). [4] А. М. Ляпунов, C. R., **128**, 910 (1899). [5] А. М. Ляпунов, C. R., **128**, 1085 (1899). [6] А. М. Ляпунов, Зап. Акад. наук по физ.-матем. отд., сер. 8, 13, № 2 (1902). [7] G. Borg, Am. Journ., **71**, № 1 (1949). [8] C. R. Putnam, Am. Journ. of Mathem., **71**, № 1 (1949).