Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

В. Я. КОЗЛОВ

# К ВОПРОСУ О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ТИПА $\{\varphi(nx)\}$ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2$

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 V 1950)*

В заметках [1] нами было установлено, что полнота $A$-совершенных систем $A[\varphi(x)]$ тесно связана с поведением некоторых аналитических функций $\Phi(\{z_k\})$ в области $G\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^2<\infty, \quad |z_k|<1, \quad k=1, 2, \ldots\right\}$. По заданной функции $\varphi(x)$ аналитическая функция $\Phi(\{z_k\})$ строилась с помощью мультипликативных функций.

В этой заметке мы установим еще одну линию связи мультипликативных функций с полнотой $A$-совершенных систем. Формулировки теорем будем давать в абстрактной форме.

Пусть пространство Гильберта $H$ разлагается в прямое произведение двух подпространств $H_1$ и $H_2$, в каждом из которых задана полная ортогональная система $\{e_{1,s}\}_{s=1}^{\infty}$ и $\{e_{2,s}\}_{s=1}^{\infty}$.

Пусть, далее, дана система изометрических операторов $U_m$, обладающих свойством

$$U_m(e_{i,s}) = e_{i,s,m}, \quad i=1, 2, \ldots, \quad s=1, 2, 3, \ldots, \quad m=1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

В этих условиях верна теорема:

Теорема 1. *Пусть даны два элемента $x_1$ и $x_2$, принадлежащие $H$:*

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}e_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}e_{2k}, \quad i=1, 2, \tag{2}$$

*для которых система элементов $\{U_m(x_1), U_m(x_2)\}$ полна в пространстве $H$.*

*Пусть, далее, выбрана произвольная мультипликативная функция $f(n)$, модуль которой меньше или равен единице; тогда два элемента $x_1(f)$ и $x_2(f)$*

$$x_i(f) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}f(k)e_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}f(k)e_{2k}, \quad i=1, 2, \tag{3}$$

*порождают полную систему элементов $\{U_n(x_1(f)), U_n(x_2(f))\}$ в пространстве $H$.*

Доказательство теоремы опирается на неравенство

$$\left\| e_{i1} - \sum_{n=1}^{N} A_{in} f(n) U_n(x_1(f)) - \sum_{n=1}^{N} B_{in} f(n) U_n(x_2(f)) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| e_{i1} - \sum_{n=1}^{N} A_{in} U_n(x_1) - \sum_{n=1}^{N} B_{in} U_n(x_2) \right\|, \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

справедливое для любых чисел $A_{in}$ и $B_{in}$, $i = 1, 2$.

Определение. Множество систем элементов $\{x_{n,\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$, где индекс $\alpha$ пробегает некоторое множество $\mathcal{E}$, называем равномерно полным в пространстве $H$, если для каждого $\varepsilon$ и произвольно заданного элемента $x \subset H$ можно указать такое $N$, что имеет место неравенство

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha) x_{n,\alpha} \right\| \leqslant \varepsilon$$

для всякого $\alpha \subset \mathcal{E}$.

Это определение позволяет доказать следующее предложение:

Теорема 2. *Пусть даны два элемента $x_1$ и $x_2$, принадлежащие $H$, с разложением* (2), *для которых система элементов $\{U_m(x_1), U_m(x_2)\}_{m=1}^{\infty}$ полна в пространстве $H$. Пусть, далее, для произвольной мультипликативной функции $f(n)$, модуль которой меньше или равен единице, построены два элемента $x_1(f)$ и $x_2(f)$, определенные равенствами* (3). *Тогда множество систем элементов $\{U_n(x_1(f)), U_n(x_2(f))\}$ равномерно полно в пространстве $H$ (для всех мультипликативных функций $f(k)$, $|f(k)| \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots$).*

Верна и обратная теорема:

Теорема 3. *Пусть даны два элемента $x_1$ и $x_2$ с разложением* (2) *и пусть, далее, для множества мультипликативных функций $f(n)$ ($|f(n)| < 1$) множество систем элементов $\{U_n(x_1(f)), U_n(x_2(f))\}$, где $x_1(f)$ и $x_2(f)$ определяются равенствами* (3) *равномерно полно в пространстве $H$. Тогда система элементов $\{U_n(x_1), U_n(x_2)\}$ будет полна в пространстве $H$.*

Для получения интересных следствий из теоремы 1 для $A$-совершенной системы сформулируем две простые леммы.

Лемма 1. *Пусть даны два элемента $x_1$ и $x_2$, принадлежащие $H$, с разложением* (2), *которые порождают полную систему $\{U_n(x_1), U_n(x_2)\}$ в пространстве $H$. Пусть, далее, даны два числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$, каждое из которых отлично от нуля, и построены два элемента $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$:*

$$\tilde{x}_i = \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} e_{1k} + \lambda_2 \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} e_{2k}, \quad i = 1, 2.$$

*Тогда система элементов $\{U_n(\tilde{x}_1), U_n(\tilde{x}_2)\}$ будет также полна в пространстве $H$.*

Лемма 2. *Пусть даны два элемента $x_1$ и $x_2$, принадлежащие $H$, с разложением* (2), *которые порождают полную систему $\{U_n(x_1), U_n(x_2)\}$ в пространстве $H$. Тогда система элементов $\{U_n(\tilde{x}_1), U_n(\tilde{x}_2)\}$, где*

$$\tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} e_{1k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} e_{2k}, \quad i = 1, 2,$$

*также полна в пространстве $H$.*

Из теоремы 1 с помощью лемм 1 и 2 получаем следующие теоремы для пространства $L_2[0, 2\pi]$ и $A$-совершенных систем.

Теорема 4. *Пусть даны две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$:*

$$\varphi_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{in} \cos nx + b_{in} \sin nx, \quad i = 1, 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{in}^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{in}^2 < \infty, \tag{5}$$

*такие, что система функций $\{1, \varphi_1(nx), \varphi_2(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2[0, 2\pi]$. Тогда функции $\widetilde{\varphi}_1(x)$ и $\widetilde{\varphi}_2(x)$, где*

$$\widetilde{\varphi}_i(x) = \int_a^x \varphi_i(x)\, dx, \quad i = 1, 2,$$

*при любом a порождают также полную систему $\{1, \varphi_1(nx), \varphi_2(nx)\}_{n=1}^{\infty}$.*

Теорема 5. *Пусть даны две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ (5) такие, что система функций $\{1, \varphi_1(nx), \varphi_2(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2[0, 2\pi]$. Тогда функции $\widetilde{\varphi}_1(x)$ и $\widetilde{\varphi}_2(x)$*

$$\widetilde{\varphi}_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{in} f(n) \cos nx + b_{in} f(n) \sin nx, \quad i = 1, 2,$$

*или функции*

$$\widetilde{\varphi}_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{in} f(n) \sin nx - \sum b_{in} f(n) \cos nx, \quad i = 1, 2,$$

*порождают также полные системы $\{1, \widetilde{\varphi}_1(nx), \varphi_2(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ для любой мультипликативной функции $f(n)$, $\{|f(n)| \leqslant 1\}$.*

Теорема 6. *Пусть даны два элемента $x_1$ и $x_2$, принадлежащие $H$, для которых система элементов $\{U_n(x_1), U_n(x_2)\}$ полна в пространстве $H$. Тогда два элемента $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$:*

$$\widetilde{x}_i = \sum_{n=1}^{N} A_{in} U_n(x_1) + \sum_{n=1}^{N} B_{in} U_n(x_2), \quad i = 1, 2,$$

*порождают полную систему элементов $\{U_n(\widetilde{x}_1), U_n(\widetilde{x}_2)\}$ в том и только в том случае, когда детерминант*

$$\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{N} \overline{A}_{1n} f(n) & \sum_{n=1}^{N} \overline{B}_{1n} f(n) \\ \sum_{n=1}^{N} \overline{A}_{2n} f(n) & \sum_{n=1}^{N} \overline{B}_{2n} f(n) \end{vmatrix}$$

*отличен от нуля для всякой мультипликативной функции $f(n)$ ($|f(p_i)| < 1$, $p_i$ — простые числа).*

Теорема 7. *Пусть даны два элемента $x_1$ и $x_2$, которые порождают полную систему $\{U_n(x_1), U_n(x_2)\}$ в пространстве $H$. Построим два новых элемента:*

$$\tilde{x}_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_{in} U_{p^n}(x_1) + \sum_{n=0}^{\infty} B_{in} U_{p^n}(x_2), \quad i = 1, 2,$$

*с такими коэффициентами $A_{in}$ и $B_{in}$, для которых степенные ряды*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{A}_{in} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \overline{B}_{in} z^n, \quad i = 1, 2,$$

*сходятся в круге радиуса $1+\delta$, $\delta > 0$. Тогда необходимое и достаточное условие полноты системы элементов $\{U_n(x_1), U_n(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $H$ заключается в том, чтобы функция*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{A}_{1n} z^n \sum_{n=0}^{\infty} \overline{B}_{2n} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \overline{A}_{2n} z^n \sum_{n=0}^{\infty} \overline{B}_{1n} z^n$$

*не имела нулей внутри круга радиуса* 1.

Рассмотрим функцию $\varphi_\theta(x) = 1$ для $0 < x < \theta < \pi$ и $\varphi_\theta(x) = 0$ для $\theta \leqslant x \leqslant \pi$. С отрезка $[0, \pi]$ функцию $\varphi_\theta(x)$ продолжаем нечетным образом с периодом $2\pi$ на всю действительную ось. Поставим общую задачу. При каких значениях $\theta$ система функций полна в многообразии нечетных функций пространства $L_2[0, 2\pi]$?

С помощью указанных теорем эту задачу можно решить в следующих случаях:

1. Если $\theta = \pi$, $\pi/2$, $2\pi/3$, то система функции $\{\varphi_\theta(x)\}$ при этих значениях $\theta$ полна в пространстве нечетных функций $L_2[0, 2\pi]$.

2. Для значения $\theta = \pi/3$ и некоторой окрестности этой точки система функций $\{\varphi_\theta(x)\}$ неполна в многообразии нечетных функций пространства $L_2[0, 2\pi]$.

3. Если $\theta = \frac{q}{p}\pi$, где $p$ — простое число, отличное от двух, а $q$ — нечетное число, и если выполняется неравенство

$$\operatorname{tg}^2 \frac{q}{p} \frac{\pi}{2} < \frac{1}{p},$$

то система функций $\{\varphi_\theta(nx)\}$ будет неполной в многообразии нечетных функций.

Интересно решить эту задачу для всех значений $\theta$.

Поступило
22 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Я. Козлов, ДАН, **62**, № 1 (1948); **61**, № 6 (1948).