Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

В. И. ВЕДЕРНИКОВ

КОНФОРМНАЯ НАЛОЖИМОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 V 1950)

А. П. Норден рассмотрел общую теорию нормализованных поверхностей пространства Мебиуса как поверхностей, в каждой точке которых определен круг, проходящий через данную точку и ортогональный поверхности. На каждой нормализованной поверхности определяется внутренняя геометрия Вейля, соответствующая нормализации поверхности ([1]).

Мы определим конформную наложимость нормализованных поверхностей *.

Определение 1. Две нормализованные поверхности конформно наложимы, если их внутренние геометрии совпадают.

Из деривационных формул для нормализованных поверхностей ([1]) следует геометрическая интерпретация конформной наложимости нормализованных поверхностей, которую мы выразим в виде определения 2, эквивалентного определению 1.

Определение 2. Две нормализованные поверхности S и $\bar{S}$ конформно наложимы, если можно установить взаимно-однозначное соответствие наложимости между точками поверхностей S и $\bar{S}$ так, что для каждой пары сходственных точек M и $\bar{M}$ существует конформное преобразование, переводящее поверхность S в положение S', которое: а) совместит сходственные точки M и $\bar{M}$ поверхностей S и $\bar{S}$, касательные сферы ξ и $\bar{\xi}$ и нормализующие круги поверхностей S и $\bar{S}$ в точках M и $\bar{M}$; б) при проектировании близких к точке $M=\bar{M}$, соответственных точек M^* и $\bar{M}^*$ поверхностей S' и $\bar{S}$ из произвольной точки касательной сферы $\xi=\bar{\xi}$ кругами ортогонально на касательную сферу $\xi=\bar{\xi}$ мы получим точки M^{**} и $\bar{M}^{**}$ такие, что расстояние между точками M^{**} и $\bar{M}^{**}$ будет бесконечно малым 3-го порядка по сравнению с расстоянием их от общей точки $M=\bar{M}$.

В частном случае нормализация может быть определена кругами, ортогональными одной неизменной сфере A. В этом случае теория нормализованных поверхностей совпадает с теорией поверхностей пространства постоянной кривизны ([1]) и конформная наложимость так нормализованных поверхностей (определения 1 и 2) совпадает с метрической наложимостью в пространстве постоянной кривизны.

---

* Возможность аналогичного определения аффиной и проективной наложимости была установлена в диссертации А. П. Нордена в 1937 г. ([4]) и с другой точки зрения Г. Ф. Лаптевым в диссертации 1941 г. ([5]).

Рассматривая поверхность как огибающую конгруенции ее центральных сфер ([3]), мы определим конформную наложимость поверхностей, на которых нормализация не определена.

Определение 3. Поверхности конформно наложимы, если совпадают геометрии Римана, определяющие угловые метрики их центральных сфер.

Определенная таким образом конформная наложимость поверхностей совпадает с конформной наложимостью нормализованных третьим инвариантным кругом поверхностей ([1]).

Определяя наложимость Картана по отношению к конформной группе, т. е. требуя, чтобы расстояние между точками поверхностей, а не только их проекциями было бесконечно малым 3-го порядка ([2]), устанавливаем, что у двух поверхностей, наложимых в смысле Картана, совпадают угловые метрики центральных сфер и линии кривизны являются соответственными в соответствии наложимости. Наложимость в смысле Картана является, таким образом, частным случаем определенной нами конформной наложимости поверхностей (определения 1 и 2).

Для изучения конформной наложимости поверхностей мы рассмотрим конгруенцию центральных сфер $\xi(u^1, u^2)$, огибающими которой являются данная поверхность $x(u^1, u^2)$ и поверхность $X(u^1, u^2)$. Если обозначить через $\xi_i = \partial_i \xi$ производные координат по криволинейным координатам, то сферы $x(u^i)$, $X(u^i)$, $\xi(u^i)$, $\xi_i(u^i)$ определяют местный конформный репер. Билинейные коварианты введенных сфер при соответствующем нормировании имеют следующие значения:

$$xx = XX = x\xi = x\xi_i = X\xi = X\xi_i = 0,$$

$$xX = \xi\xi = 1, \quad \xi_i \xi_j = g_{ij}.$$

Разлагая производные пентасферических координат по криволинейным, мы получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_i x &= -g^{rs} b_{ri} \xi_s + l_i x, \\ \partial_i X &= -g^{rs} a_{ri} \xi_s - l_i x, \\ \nabla_j \xi_i &= a_{ij} x + b_{ij} x - g_{ij} \xi. \end{aligned} \tag{A$_1$}$$

Коэффициенты этих разложений будут тензорами, форма $d\varphi^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j$ определяет угловую метрику центральных сфер поверхности, а g^{ij} — тензор, взаимный g_{ij}.

Условия интегрируемости системы (A$_1$) запишутся в виде

$$b_{i\,[j\,/\,k]} = b_{i\,[j} l_{k]}, \quad K = \frac{\operatorname{Det} \| b_{ij} \|}{\operatorname{Det} \| g_{ij} \|} = -1, \quad g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 0; \tag{B^1}$$

$$a_{i\,[j\,/\,k]} + a_{i\,[j} l_{k]} = 0; \tag{B^2}$$

$$\varkappa = -\tilde{b}^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + 1; \quad g^{rs} a_{r\,[i} b_{j]\,s} = l_{[i\,/\,j]}, \tag{B^3}$$

где $\varkappa$ — кривизна метрики g_{ij}, $\tilde{b}^{\alpha\beta}$ — тензор, взаимный тензору $b_{\alpha\beta}$, и ковариантное дифференцирование производится в метрике Римана g_{ij}.

Вводя нормированный тензор π_{ij} сети, изотермический в метрике g_{ij}, а также тензоры $c_{ij} = g_i^{\alpha} b_{\alpha j}$ и $\bar{\pi}_{ij} = g_i^{\alpha} \pi_{\alpha j}$, где g_i^{α} — версор, определяющий поворот вектора на 90°, и определяя вектор τ_k равенством

$$\pi_{i\,[j\,/\,k]} = \pi_{i\,[j} l_{k]}, \tag{b}$$

получим отсюда и из условия (B^1)

$$b_{ij\,|\,k} = c_{ij}\bar{l}_k, \quad \text{где} \quad \bar{l}_k = g^i_k l_i;$$

$$\pi_{ij\,|\,k} = \bar{\pi}_{lj}\bar{\tau}_k, \quad \text{где} \quad \bar{\tau}_k = g^i_k \tau_i. \tag{b^1}$$

Условия интегрируемости (b^1) запишутся в виде:

$$\varkappa = -{}^1/_2 g^{ij} l_{i\,|\,j} = -{}^1/_2 g^{ij}\tau_{i\,|\,j}.$$

Так как b_{ij} допускает разложение

$$b_{ij} = \pi_{ij}\cos\varphi + \bar{\pi}_{ij}\sin\varphi, \tag{b'}$$

то имеем

$$l_k = \tau_k - \bar{\varphi}_k, \quad \text{где} \quad \bar{\varphi}_k = g^i_k \partial_i \varphi. \tag{b''}$$

Условия интегрируемости (B) эквивалентны уравнениям (b), (b') и (b'') вместе с уравнениями:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= Hg_{ij} - \left(\frac{\varkappa-1}{2}\right) b_{ij} - \frac{1}{2}\left(g^{ij}\varphi_{i\,|\,j}\right) c_{ij}, \\ a_{i\,[j\,|\,k]} &+ a_{i\,[j}l_{k]} = 0. \end{aligned} \tag{B'}$$

Здесь тензоры π_{ij}, τ_k могут быть выбраны определенным образом в заданной метрике g_{ij}.

Система (B') представляет систему двух уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $\varphi(u^1, u^2)$ и $H(u^1, u^2)$.

Приводя систему к нормальному виду и применяя теорему С. Ковалевской, имеем: как бы ни была задана метрика Римана g_{ij}, существует бесконечное множество поверхностей пространства Мебиуса, зависящее от четырех произвольных функций одного аргумента, которые имеют в качестве угловой метрики своих центральных сфер заданную метрику Римана g_{ij}, т. е. конформно наложимых друг на друга.

Отметим некоторые результаты, вытекающие из рассмотрения уравнений (B').

1. Всякие две наложимые в смысле Картана неизотермические поверхности конформно тождественны [6]. Совокупность изотермических конформно не тождественных поверхностей, наложимых на данную, зависит от одной произвольной постоянной. Все поверхности, наложимые в смысле Картана на минимальные поверхности пространства постоянной кривизны [3], могут быть получены конформным преобразованием из поверхностей пространства постоянной кривизны, имеющих постоянную среднюю кривизну.

2. Со всякой M-минимальной поверхностью [3] связывается семейство ∞^1 M-минимальных поверхностей, конформно наложимых на данную так, что линиям кривизны одной из поверхностей семейства соответствует на другой поверхности семейство изогональных траекторий ее линий кривизны. Мы будем говорить, что семейство это получено элементарным изгибанием из данной поверхности.

3. Все минимальные поверхности пространства Евклида конформно наложимы друг на друга и имеют угловую метрику центральных сфер постоянной кривизны $\varkappa = 1$. Всякой метрике Римана, для которой выполняется соотношение

$$\varkappa = -{}^1/_4 g^{ij}\nabla_{ij}\ln(\varkappa - 1),$$

и только такой, соответствует ∞^1 минимальных конформно не тождественных поверхностей пространства постоянной кривизны ([3]), получающихся одна из другой элементарным изгибанием. Две минимальные поверхности, не переводимые друг в друга конформным преобразованием или элементарным изгибанием, не могут быть конформно наложимы.

4. Если на изотермической поверхности с угловой метрикой центральных сфер $\varkappa = \mathrm{const}$ принять линии кривизны в качестве параметрических линий, то линейный элемент угловой метрики центральных сфер имеет форму Лиувилля. Обратно, если мы определим в метрике постоянной кривизны сеть, в которой линейный элемент принимает форму Лиувилля, то всегда ее можно принять за сеть кривизны некоторой изотермической поверхности, угловая метрика центральных сфер которой будет иметь заданную метрику Римана.

5. В каждой точке произвольной поверхности определяются три конформно инвариантных круга ([1]), лежащие на одной сфере. Круги параболического пучка, определяемого этими тремя кругами и образующие с ними постоянное ангармоническое отношение, определяют ∞^1 конформно инвариантных нормализаций поверхности и совокупность соответствующих внутренних геометрий. Совокупность поверхностей, не наложимых в смысле Картана, но конформно наложимых одна на другую так, что на них все эти геометрии совпадают, может быть получена из одной поверхности семейства элементарным изгибанием или конформным преобразованием. Совокупность поверхностей, допускающих такую наложимость, но не принадлежащих классу M-минимальных и изотермических поверхностей, зависит от шести произвольных функций одного аргумента. Всякая не изотермическая, не M-минимальная поверхность, исключая указанное множество поверхностей, с точностью до конформного преобразования определяется заданием двух своих тензоров g_{ij}, l_k, которые определяют внутреннюю геометрию Вейля, соответствующую нормализации с помощью первого инвариантного круга (нормального круга поверхности).

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
24 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Норден, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, № 2, 105 (1950). [2] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, 1937. [3] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3, Berlin, 1929. [4] А. П. Норден, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. 7, 62 (1949). [5] Г. Ф. Лаптев, ДАН, 58. № 4 (1947). [6] E. Cartan, Ann. de la Soc. Pol. de Math., 221 (1923).