Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

М. Д. КАЛАШНИКОВ

ЗАМЕЧАНИЕ О БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 IV 1950)

Как известно ([1]), аналитическая функция $f(z)$, для которой $f(0)=1$, может быть представлена при помощи бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n z^n)$. Поэтому имеет значение вопрос об аналоге известной теоремы Абеля для бесконечных произведений.

Харди ([2]), впервые занимавшийся этим вопросом, указал пример сходящегося бесконечного произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$, для которого произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k x)$ сходится только при $x=1$ и $x=0$.

В настоящей заметке устанавливается теорема, дающая необходимые и достаточные условия для того, чтобы из сходимости бесконечного произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ следовала сходимость произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k u_k)$ и, которая, следовательно, является в некотором смысле обобщением результатов Харди.

Теорема. *Для того чтобы при помощи последовательности $\{a_k\}$ любое сходящееся бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ преобразовалось в сходящееся произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k u_k)$, необходимо и достаточно, чтобы:* 1) *предел* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ *существовал и был равен* 0 *или* 1; 2) *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k-a)$, *где* $a=\lim\limits_{k\to\infty} a_k$, *сходился абсолютно.*

Замечание. Бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$, для которого $u_k\neq -1$, $k=1, 2, \ldots$, будем называть сходящимся, если последовательность

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k), \quad n=1,\ 2, \ldots,$$

сходится к конечному, отличному от нуля пределу. Произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$, содержащее конечное число членов $1+u_k$, равных нулю, будем называть сходящимся, если сходится, в указанном выше смысле, произведение, получаемое из данного путем вычеркивания всех равных нулю членов ([3]).

Доказательство. Пусть условие 1) не выполнено. Мы можем считать, что последовательность $\{a_k\}$ не содержит одновременно бесконечного множества нулей и бесконечного множества единиц, ибо в противном случае легко построить сходящееся произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$, для которого произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k u_k)$ расходится. Но тогда существует подпоследовательность $\{a_{k_\nu}\}$ последовательности $\{a_k\}$, удовлетворяющая одному из следующих трех условий: а) $a_{k_\nu} < -\alpha$, $\nu = 1, 2, \ldots$; б) $a_{k_\nu} > 1+\alpha$, $\nu = 1, 2, \ldots$; в) $\alpha < a_{k_\nu} < 1+\alpha$, $\nu = 1, 2, \ldots$, где α — некоторое постоянное положительное число.

В первых двух случаях положим:

$$u_k = 0, \text{ если } k \neq k_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad k = k_1, k_2;$$

$$u_k = -\frac{1}{\sqrt{p}}, \text{ если } k = k_{2p-1} \text{ и } a_{k_{2p-1}} \geqslant a_{k_{2p}} \text{ или } k = k_{2p} \text{ и } a_{k_{2p-1}} < a_{k_{2p}};$$

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p}, \text{ если } k = k_{2p} \text{ и } a_{k_{2p-1}} \geqslant a_{k_{2p}} \text{ или } k = k_{2p-1} \text{ и } a_{k_{2p-1}} < a_{k_{2p}};$$

$$p = 2, 3, \ldots$$

Бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$, очевидно, является сходящимся, но соответствующее ему произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k u_k)$ расходится. Действительно, при $a_{k_{2p-1}} \geqslant a_{k_{2p}}$

$$(1 + a_{k_{2p-1}} u_{k_{2p-1}})(1 + a_{k_{2p}} u_{k_{2p}}) = \left(1 - \frac{a_{k_{2p-1}}}{\sqrt{p}}\right)\left[1 + a_{k_{2p}}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p}\right)\right] =$$

$$= 1 + \frac{a_{k_{2p}} - a_{k_{2p-1}}}{\sqrt{p}} + \frac{a_{k_{2p}}(1 - a_{k_{2p-1}})}{p} - \frac{a_{k_{2p-1}} a_{k_{2p}}}{p\sqrt{p}} < 1 - \frac{\alpha(1+\alpha)}{p},$$

а при $a_{k_{2p-1}} < a_{k_{2p}}$

$$(1 + a_{k_{2p-1}} u_{k_{2p-1}})(1 + a_{k_{2p}} u_{k_{2p}}) = \left[1 + a_{k_{2p-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p}\right)\right]\left(1 - \frac{a_{k_{2p}}}{\sqrt{p}}\right) =$$

$$= 1 + \frac{a_{k_{2p-1}} - a_{k_{2p}}}{\sqrt{p}} + \frac{a_{k_{2p-1}}(1 - a_{k_{2p}})}{p} - \frac{a_{k_{2p-1}} a_{k_{2p}}}{p\sqrt{p}} < 1 - \frac{\alpha(1+\alpha)}{p}, \quad p = 2, 3, \ldots$$

В третьем случае положим:

$$u_k = 0, \qquad \text{если } k \neq k_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad k = k_1, k_2;$$

$$u_k = -\frac{}{\sqrt{p}}, \quad \text{если } k = k_{2p-1} \text{ и } a_{k_{2p-1}} \leqslant a_{k_{2p}} \text{ или } k = k_{2p} \text{ и } a_{k_{2p-1}} > a_{k_{2p}};$$

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p}, \quad \text{если } k = k_{2p} \text{ и } a_{k_{2p-1}} \leqslant a_{k_{2p}} \text{ или } k = k_{2p-1} \text{ и } a_{k_{2p-1}} > a_{k_{2p}};$$

$$p = 2, 3, \ldots$$

Тогда при $a_{k_{2p-1}} \leqslant a_{k_{2p}}$:

$$(1 + a_{k_{2p-1}} u_{k_{2p-1}})(1 + a_{k_{2p}} u_{k_{2p}}) =$$
$$= \left(1 - \frac{a_{k_{2p-1}}}{\sqrt{p}}\right)\left[1 + a_{k_{2p}}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p}\right)\right] > 1 + \frac{\alpha^2}{p} - \frac{(1-\alpha)^2}{p\sqrt{p}},$$

а при $a_{k_{2p-1}} > a_{k_{2p}}$:

$$(1 + a_{k_{2p-1}} u_{k_{2p-1}})(1 + a_{k_{2p}} u_{k_{2p}}) =$$
$$= \left[1 + a_{k_{2p-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{p}\right)\right]\left(1 - \frac{a_{k_{2p}}}{\sqrt{p}}\right) > 1 + \frac{\alpha^2}{p} - \frac{(1-\alpha)^2}{p\sqrt{p}},$$
$$p = 2, 3, \ldots,$$

и, следовательно, произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k u_k)$ расходится. Итак, необходимость условия 1) установлена.

Предположим, далее, что не выполнено условие 2).

Пусть $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$; в таком случае расходится по крайней мере один из рядов, составленных, соответственно, из положительных и отрицательных членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Пусть, например, расходится ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k_\nu}$, составленный из положительных членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Не нарушая общности, можно, очевидно, предположить, что $a_{k_\nu} < {}^1/_2$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Ряд $\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p$, где

$$\alpha_p = a_{k_{2p-1}}(1 - a_{k_{2p}}), \quad \text{если} \quad a_{k_{2p-1}} > a_{k_{2p}},$$
$$\alpha_p = a_{k_{2p}}(1 - a_{k_{2p-1}}), \quad \text{если} \quad a_{k_{2p-1}} \leqslant a_{k_{2p}}, \qquad p = 1, 2, \ldots$$

также расходится, т. е. существует некоторое $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{p_l\}$, $p_{l+1} - p_l \geqslant 2$, $l = 1, 2, \ldots$; $p_1 > 1$, такие, что

$$\sum_{p=p_{l-1}}^{p_l - 1} \alpha_p \geqslant \varepsilon, \quad l = 2, 3, \ldots$$

Положим

$$u_k = 0, \qquad \text{если } k \neq k_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad k = k_1, k_2, \ldots, k_{2p_1 - 2};$$

$$u_k = -\frac{1}{\sqrt{l}}, \quad \text{если } k = k_{2p-1} \text{ и } a_{k_{2p-1}} \leqslant a_{k_{2p}} \text{ или } k = k_{2p} \text{ и } a_{k_{2p-1}} > a_{k_{2p}};$$

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{l}} + \frac{1}{l}, \text{ если } k = k_{2p} \text{ и } a_{k_{2p-1}} \leqslant a_{k_{2p}} \text{ или } k = k_{2p-1} \text{ и } a_{k_{2p-1}} > a_{k_{2p}};$$

$$p_{l-1} \leqslant p < p_l, \quad l = 2, 3, \ldots$$

Бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$, очевидно, сходится, но соответствующее ему произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k u_k)$ расходится.

В самом деле, при $a_{k_{2p-1}} \leqslant a_{k_{2p}}$:

$$(1 + a_{k_{2p-1}} u_{k_{2p-1}})(1 + a_{k_{2p}} u_{k_{2p}}) =$$

$$= \left(1 - \frac{a_{k_{2p-1}}}{\sqrt{l}}\right)\left(1 + \frac{a_{k_{2p}}}{\sqrt{l}-1}\right) = 1 + \frac{a_{k_{2p}} - a_{k_{2p-1}}}{\sqrt{l}} + \frac{a_{k_{2p}}(1 - a_{k_{2p-1}})}{\sqrt{l}(\sqrt{l}-1)} > 1 + \frac{\alpha_p}{l},$$

а при $a_{k_{2p-1}} > a_{k_{2p}}$:

$$(1 + a_{k_{2p-1}} u_{k_{2p-1}})(1 + a_{k_{2p}} u_{k_{2p}}) = \left(1 + \frac{a_{k_{2p-1}}}{\sqrt{l}-1}\right)\left(1 - \frac{a_{k_{2p}}}{\sqrt{l}}\right) > 1 + \frac{\alpha_p}{l},$$

$$p_{l-1} \leqslant p < p_l, \quad l = 2, 3, \ldots,$$

и, таким образом,

$$\prod_{p=p_{l-1}}^{p_l - 1} (1 + a_{k_{2p-1}} u_{k_{2p-1}})(1 + a_{k_{2p}} u_{k_{2p}}) > \frac{1}{l} \sum_{p=p_{l-1}}^{p_l - 1} \alpha_p \geqslant \frac{\varepsilon}{l}, \quad l = 2, 3, \ldots,$$

чем необходимость условия 2) и доказана. В случае, когда $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 1$, доказательство необходимости условия 2) можно привести совершенно аналогично, если воспользоваться тождеством

$$\prod_{k=m}^{n} (1 + a_k u_k) = \prod_{k=m}^{n} (1 + u_k) \prod_{k=m}^{n} \left[1 + (a_k - 1)\frac{u_k}{1 + u_k}\right].$$

Из этого же тождества непосредственно следует, что условия теоремы достаточны. Если $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, достаточность условий теоремы очевидна.

Примечание. Доказанная теорема обобщается на случай двойных бесконечных произведений.

Пользуюсь случаем выразить искренную глубокую благодарность проф. И. Е. Огиевецкому за предложенную тему и ценные указания.

Днепропетровский государственный университет

Поступило 4 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. F. Ritt, Math. Zs., **32**, 1 (1930). [2] G. H. Hardy, London Math. Soc., (2), 7, 40 (1909). [3] В. В. Немыцкий, Курс математического анализа, **1**, стр. 67—68.