Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. Е. ЖАК

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СОПРЯЖЕННЫХ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 27 IV 1950)

И. И. Привалов ([1]) показал, что если тригонометрический ряд является рядом Фурье функции $f(x)$, удовлетворяющей условию Липшица с показателем α, $0<\alpha<1$ ($f(x) \in Lip\,\alpha$), то сопряженный с ним тригонометрический ряд сходится к некоторой функции $\bar{f}(x)$, $\bar{f}(x) \in Lip\,\alpha$. В настоящей заметке этот результат переносится в известном смысле на двойные тригонометрические ряды.

Следуя В. Г. Челидзе, назовем ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(d_{mn}\cos mx\cos ny - b_{mn}\cos mx\sin ny - \\ - c_{mn}\sin mx\cos ny + a_{mn}\sin mx\sin ny) \qquad (1)$$

сопряженным с рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{mn}\cos mx\cos ny + b_{mn}\sin mx\cos ny + \\ + c_{mn}\cos mx\sin ny + d_{mn}\sin mx\sin ny). \qquad (2)$$

Скажем, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица с показателями α, β, $0<\alpha, \beta\leqslant 1$ ($f(x, y) \in Lip(\alpha, \beta)$) в плоской области Q, если для любых двух точек (x_1, y_1), (x_2, y_2) из этой области выполняется следующее неравенство:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2)| < M|x_2 - x_1|^{\alpha}|y_2 - y_1|^{\beta}, \qquad (3)$$

где M — константа, зависящая только от f.

Теорема. *Если ряд* (2) *есть ряд Фурье — Лебега функции* $f(x, y)$, $f(x, y) \in Lip(\alpha, \beta)$, $0<\alpha, \beta<1$, *в сегменте* $R=[0, 2\pi; 0, 2\pi]$, *то ряд* (1) *сходится к некоторой ограниченной функции* $\bar{f}(x, y)$, $\bar{f}(x, y) \in Lip(\alpha, \beta)$.

Доказательство. Обозначим через $S_{mn}(x, y)$ (m, n)-ю частную сумму ряда (1). Пользуясь формулами для коэффициентов Фурье — Лебега ([2]), находим, что

$$S_{mn}(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+s, y+t)\sum_{k=1}^{m}\sin ks\sum_{l=1}^{n}\sin lt\,ds\,dt.$$

Нетрудно показать, что в силу (3) и известных свойств коэффициентов Фурье — Лебега последовательность $S_{mn}(x, y)$ сходится к некоторой ограниченной функции $\bar{f}(x, y)$,

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(x+s, y+t) - f(x-s, y+t) - f(x+s, y-t) + f(x-s, y-t)] \operatorname{ctg}\frac{s}{2} \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\, ds\, dt.$$

Последний интеграл можно представить в следующем виде:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - f(x+s, y) + f(x, y)] \operatorname{ctg}\frac{s}{2} \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\, ds\, dt = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta f(x, y; s, t) \operatorname{ctg}\frac{s}{2} \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\, ds\, dt. \tag{4}$$

Покажем теперь, что каковы бы ни были $0 < h, \eta < 2\pi$, существует константа K такая, что

$$|\bar{f}(x+h, y+\eta) - \bar{f}(x+h, y) - \bar{f}(x, y+\eta) + \bar{f}(x, y)| < K h^{\alpha} \eta^{\beta}. \tag{5}$$

Из формулы (4) находим

$$\bar{f}(x+h, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+s, y+t) - f(x+s, y) - f(x+h, y+t) + f(x+h, y)] \operatorname{ctg}\frac{s-h}{2} \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\, ds\, dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta f(x, y; s-h, t) \operatorname{ctg}\frac{s-h}{2} \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\, ds\, dt; \tag{6}$$

$$\bar{f}(x, y+\eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - f(x+s, y+\eta) + f(x, y+\eta)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta f(x, y; s, t-\eta) \operatorname{ctg}\frac{s}{2} \operatorname{ctg}\frac{t-\eta}{2}\, ds\, dt; \tag{7}$$

$$\bar{f}(x+h, y+\eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+s, y+t) - f(x+h, y+t) - f(x+s, y+\eta) + f(x+h, y+\eta)] \operatorname{ctg}\frac{s-h}{2} \operatorname{ctg}\frac{t-\eta}{2}\, ds\, dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta f(x, y; s-h, t-\eta) \operatorname{ctg}\frac{s-h}{2} \operatorname{ctg}\frac{t-\eta}{2}\, ds\, dt. \tag{8}$$

Так как $f(x, y) \in Lip(\alpha, \beta)$, $0 < \alpha, \beta < 1$, то подинтегральные функции в формулах (4), (6), (7), (8) не превосходят по абсолютной величине, соответственно, $A|s|^{\alpha-1}|t|^{\beta-1}$, $B|s-h|^{\alpha-1}|t|^{\beta-1}$, $C|s|^{\alpha-1}|t-\eta|^{\beta-1}$, $D|s-h|^{\alpha-1}|t-\eta|^{\beta-1}$, где A, B, C, D — константы. Поэтому, если из области интегрирования $R = [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$ выкинуть прямоугольник

$[-2h, 2h; -2\eta, 2\eta]$, то в оценке левой части (5) мы сделаем ошибку, равную $O(h^{\alpha}\eta^{\beta})$, $h\to 0$, $\eta\to 0$.

Достаточно, таким образом, показать, что

$$\delta(h,\eta)=\iint\limits_{R^*}\Delta f(x,y;s-h,t-\eta)\operatorname{ctg}\frac{s-h}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-\eta}{2}\,ds\,dt-$$

$$-\iint\limits_{R^*}\Delta f(x,y;s-h,t)\operatorname{ctg}\frac{s-h}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,ds\,dt-$$

$$-\iint\limits_{R^*}\Delta f(x,y;s,t-\eta)\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-\eta}{2}\,ds\,dt+$$

$$+\iint\limits_{R^*}\Delta f(x,y;s,t)\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,ds\,dt=O(h^{\alpha}\eta^{\beta}),\quad h,\eta\to 0, \tag{9}$$

где R^* есть область, остающаяся в R после выкидывания прямоугольника $[-2h, 2h; -2\eta, 2\eta]$.

В доказательстве (9) существенную роль играет следующее равенство:

$$\iint\limits_{R^*}[f(x+s,y+t)-f(x+u,y+t)-f(x+s,y+v)+$$

$$+f(x+u,y+v)]\operatorname{ctg}\frac{s-u}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-v}{2}\,ds\,dt=\int\limits_{2h}^{\pi}\int\limits_{2\eta}^{\pi}[f(x+s,y+t)-$$

$$-f(x-s,y+t)-f(x+s,y-t)+f(x-s,y-t)]\operatorname{ctg}\frac{s+u}{2}\operatorname{ctg}\frac{t+v}{2}\,ds\,dt+$$

$$+\int\limits_{-2h}^{2h}\int\limits_{2\eta}^{\pi}[f(x+s,y+t)-f(x+u,y+t)-f(x+s,y-t)+$$

$$+f(x+u,y-t)]\operatorname{ctg}\frac{s-u}{2}\operatorname{ctg}\frac{t+v}{2}\,ds\,dt+\int\limits_{2h}^{\pi}\int\limits_{-2\eta}^{2\eta}[f(x+s,y+t)-$$

$$-f(x+s,y+v)-f(x-s,y+t)+f(x-s,y+v)]\operatorname{ctg}\frac{s+u}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-v}{2}\,ds\,dt=$$

$$=I^{u,v}(h,\eta)+J^{u,v}(h,\eta)+K^{u,v}(h,\eta), \tag{10}$$

где $u=0, h$, $v=0, \eta$.

На основании (10) получаем:

$$\delta(h,\eta)=[I^{0,0}(h,\eta)-I^{h,0}(h,\eta)-I^{0,\eta}(h,\eta)+I^{h,\eta}(h,\eta)]+$$
$$+[J^{0,0}(h,\eta)-J^{0,\eta}(h,\eta)]+[J^{h,\eta}(h,\eta)-J^{h,0}(h,\eta)]+$$
$$+[K^{0,0}(h,\eta)-K^{h,0}(h,\eta)]+[K^{h,\eta}(h,\eta)-K^{0,\eta}(h,\eta)]=$$
$$=L_1(h,\eta)+L_2(h,\eta)+L_3(h,\eta)+L_4(h,\eta)+L_5(h,\eta).$$

Совершая необходимые выкладки, находим

$$L_1(h,\eta)=\int\limits_{2h}^{\pi}\int\limits_{2\eta}^{\pi}[f(x+s,y+t)-f(x-s,y+t)-f(x+s,y-t)+$$

$$+f(x-s,y-t)]\left(\operatorname{ctg}\frac{s+h}{2}-\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{t+\eta}{2}-\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)ds\,dt,$$

$$L_2(h,\eta)=\int\limits_{-2h}^{2h}\int\limits_{2\eta}^{\pi}[f(x+s,y+t)-f(x,y+t)-f(x+s,y-t)+$$
$$+f(x,y-t)]\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\operatorname{ctg}\frac{t+\eta}{2}\right)ds\,dt,$$

$$L_3(h,\eta)=\int\limits_{-2h}^{2h}\int\limits_{2\eta}^{\pi}[f(x+s,y+t)-f(x+h,y+t)-f(x+s,y-t)+$$
$$+f(x+h,y-t)]\operatorname{ctg}\frac{s-h}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{t+\eta}{2}-\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)ds\,dt,$$

$$L_4(h,\eta)=\int\limits_{2h}^{\pi}\int\limits_{-2\eta}^{2\eta}[f(x+h,y+t)-f(x+s,y)-f(x-s,y+t)+$$
$$+f(x-s,y)]\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{s}{2}-\operatorname{ctg}\frac{s+h}{2}\right)ds\,dt,$$

$$L_5(h,\eta)=\int\limits_{2h}^{\pi}\int\limits_{-2\eta}^{2\eta}[f(x+s,y+t)-f(x+s,y+\eta)-f(x-s,y+t)+$$
$$+f(x-s,y+\eta)]\operatorname{ctg}\frac{t-\eta}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{s+h}{2}-\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\right)ds\,dt.$$

Заметим далее, что

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(z+u)-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}z=-\frac{\sin\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}(z+u)\sin\frac{1}{2}z}. \tag{11}$$

Так как $f(x,y)\in Lip(\alpha,\beta)$, $0<\alpha,\beta<1$, то вследствие (11), получаем следующие оценки:

$$|L_1(h,\eta)|<C_1h\eta\int\limits_{2h}^{\pi}\int\limits_{2\eta}^{\pi}s^{\alpha-2}t^{\beta-2}\,ds\,dt<C_1'h^{\alpha}\eta^{\beta};$$

$$|L_2(h,\eta)|<C_2\eta\int\limits_{-2h}^{2h}\int\limits_{2\eta}^{\pi}|s|^{\alpha-1}t^{\beta-2}ds\,dt<C_2'h^{\alpha}\eta^{\beta};$$

$$|L_3(h,\eta)|<C_3\eta\int\limits_{-2h}^{2h}\int\limits_{2\eta}^{\pi}|s-h|^{\alpha-1}t^{\beta-2}ds\,dt<C_3'h^{\alpha}\eta^{\beta};$$

$$|L_4(h,\eta)|<C_4h\int\limits_{2h}^{\pi}\int\limits_{-2\eta}^{2\eta}s^{\alpha-2}|t|^{\beta-1}ds\,dt<C_4'h^{\alpha}\eta^{\beta};$$

$$|L_5(h,\eta)|<C_5h\int\limits_{2h}^{\pi}\int\limits_{-2\eta}^{2\eta}s^{\alpha-2}|t-\eta|^{\beta-1}ds\,dt<C_5'h^{\alpha}\eta^{\beta},$$

где C_i, C_i' — константы. Из последних оценок следует, что

$$\delta(h,\eta)=O(h^{\alpha}\eta^{\beta}),\quad h\to 0,\ \eta\to 0.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

Поступило
17 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939, стр. 158. [2] В. Г. Челидзе, ДАН, 54, 117 (1946).