Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 2

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

В. И. БЛИНОВ и Т. А. РОЗЕТ

О ГОРЕНИИ УГЛЕРОДНОГО ШАРА

(Представлено академиком А. Н. Фрумкиным 19 V 1950)

1. Задача горения углеродного шара решалась неоднократно и различными способами.

Если положить, что концентрация c_w кислорода на поверхности сгорающего шара равна ее среднему значению $\overline{c}_w$,

$$c_w = \overline{c}_w, \tag{1}$$

а средняя скорость горения $\overline{k}_s = k\overline{c}_w = \alpha(c_0 - \overline{c}_w)$, то легко установить, что

$$\overline{k}_s = \frac{kc_0}{1 + k/\alpha}, \tag{2}$$

где k — константа скорости реакции кислорода с углеродом, c_0 — концентрация кислорода в окружающей газовой среде, а α — коэффициент газообмена определяемый из решения дифференциального уравнения диффузии при надлежащих краевых условиях. Этот путь использовался В. И. Блиновым в ряде работ (1).

А. С. Предводителев (2) вместо (1) брал краевое условие в виде

$$D\frac{\partial c}{\partial n} = kc_w, \tag{3}$$

где n — нормаль к поверхности, а D — коэффициент диффузии кислорода. Положив $\sin^2\beta = 1$ в преобразованном краевом условии, А. С. Предводителев решил уравнение диффузии и вычислил среднее значение k_s для шара. В. С. Пушкин (3) продолжил работу Предводителева, не внеся изменений в упрощенное краевое условие последнего.

Представлялось интересным дать решение рассматриваемой задачи при выполнении условия (3), не прибегая к упрощению в последнем, и сравнить результаты, полученные двумя указанными выше способами.

2. Возьмем угольный шар, обтекаемый потенциальным газовым потоком, скорость которого равна v. Начало координат поместим в центре шара. Ось x направим по потоку.

Уравнение диффузии для шара можно написать в виде (1,2,4)

$$\delta\frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} = \frac{\partial c}{\partial \varphi}, \tag{4}$$

где $\delta = \frac{D}{v}$, $\varphi = \int\limits_0^{\varphi_1} r^2 d\varphi_1$, $\varphi_1 = x\left(1 + \frac{\rho_0^3}{2\rho^3}\right) + \frac{3}{2}\rho_0$, $\psi = \frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{\rho_0^3}{\rho^3}\right)$,

$r^2 = y^2 + z^2$, $\rho^2 = x^2 + r^2$, а ρ_0 — радиус шара.

Положим, что $c_{\varphi=0} = c_0$ и $D\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0} = kc_w$. Так как на поверхности шара

$$\frac{\partial c}{\partial \rho} = \frac{3}{2}\rho_0 \sin^2\beta \frac{\partial c}{\partial \varphi}, \tag{5}$$

где β — угол между осью x и радиусом ρ, то второе краевое условие можно написать так:

$$\sin^2\beta\left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} = hc_{\psi=0}, \quad h = \frac{2}{3\rho_0}\frac{k}{D}.$$

Вычисления показывают, что $\sin\beta$ и $\varphi/2\rho_0^3 = \vartheta$ связаны соотношением: $3\sin^4\beta + \sin^6\beta = 16\vartheta(1-\vartheta)$. Если $\sin^4\beta$ обозначить через η, то получим:

$$\eta = \frac{16}{3}\vartheta(1-\vartheta) - \frac{1}{3}\eta^{3/2}, \tag{6}$$

а используя ряд Лагранжа, найдем:

$$\sin^2\beta = \sqrt{\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n [\vartheta(1-\vartheta)]^{\frac{n+1}{2}}, \tag{7}$$

$$q_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad q_n = (-1)^n \frac{(3n-1)(3n-3)\cdots(n+3)}{2^n 3^n n!}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Развертывая $(1-\vartheta)^{\frac{n+1}{2}}$ по степеням ϑ, получим для $\sin^2\beta$ такой ряд:

$$\sin^2\beta = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \vartheta^{k+1/2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \vartheta^k. \tag{8}$$

Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n t^{n+1}$ равен $\frac{1}{2}$. Таким образом, ряд (8) сходится абсолютно в промежутке $0 \leqslant \vartheta < 1$.

Подсчет дает: $A_0 = 2{,}3094$; $A_1 = -0{,}2994$; $A_2 = -0{,}1081$; $A_3 = -0{,}0598$; $A_4 = -0{,}0392$; $A_5 = -0{,}0281$; $B_1 = -0{,}8889$; $B_2 = -0{,}1646$; $B_3 = -0{,}0780$; $B_4 = -0{,}0477$; $B_5 = -0{,}0332$ и т. д.

Теперь краевое условие при $\psi = 0$ можно записать в виде:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\psi=0}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} A_k \vartheta^{k+1/2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \vartheta^k\right\} = hc_{\psi=0}. \tag{9}$$

Функция

$$c(\varphi, \psi) = c_0 - \sqrt{\frac{\delta}{\pi}} \int\limits_0^{\varphi} \frac{e^{-\psi^2/4\delta(\varphi-\tau)}}{\sqrt{\varphi-\tau}} f_1(\tau)\, d\tau \tag{10}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (4) и краевому условию $c_{\varphi=0} = c_0$; кроме того,

$$\left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} = f_1(\varphi), \qquad \left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\psi=\infty} = 0. \tag{11}$$

Остается определить функцию $f_1(\varphi)$ так, чтобы выполнялось условид (9).

Положив в (10) $\psi = 0$ и введя обозначения $\tau = 2\rho_0^3\sigma$, $f_1(2\rho_0^3\sigma) = f(\sigma)$, $\theta = 4k/3\alpha$, $\alpha = \sqrt{2Dv/\pi\rho_0}$, придем к такому интегральному уравнению с искомой функцией $f(\vartheta)$:

$$f(\vartheta)\left\{\sum_{k=0}^{\infty} A_k \vartheta^{k+1/2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \vartheta^k\right\} + \frac{\theta}{\pi}\int_0^{\vartheta} \frac{f(\sigma)}{\sqrt{\vartheta-\sigma}}\, d\sigma = hc_0. \tag{12}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда:

$$f(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k + \frac{b_k}{\sqrt{\vartheta}}\right)\vartheta^k. \tag{13}$$

Подставим (13) в (12) и выполним интегрирование в последнем. Тогда сравнение коэффициентов при одинаковых степенях ϑ даст следующие рекуррентные формулы для определения коэффициентов ряда (13):

$$b_0(A_0 + \theta) = hc_0, \qquad a_0\left(A_0 + \frac{2}{\pi}\theta\right) = -B_1 b_0,$$

$$b_n\left[A_0 + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\theta\right] = -\sum_{k=0}^{n-1}(A_{n-k}b_k + B_{n-k}a_k),$$

$$a_n\left[A_0 + \frac{2}{\pi}\frac{2^n n!}{(2n-1)!!}\theta\right] = -\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k}a_k - \sum_{k=0}^{n} B_{n+1-k}b_k. \tag{14}$$

Сходимость ряда (13) исследуется следующим образом. Сперва замечаем, что при $\theta = 0$ абсолютные величины коэффициентов имеют соответственно большие значения, чем при $\theta > 0$. При $\theta = 0$ имеем: $f(\vartheta) = \frac{hc_0}{\sin^2\beta} = hc_0\eta^{-1/2}$, а ряд Лагранжа для функции $\eta^{-1/2}$, составленный по уравнению (6), сходится абсолютно в промежутке $0 \leqslant \vartheta < 1$.

Площадь кольцевой полоски на поверхности шара $ds = 2\pi\rho_0 r\, d\beta$, а количество кислорода, подведенного к этой полоске в 1 сек.,

$$dM = D\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0} ds = 2\pi D\,\frac{3}{2}\,\rho_0^2\sin^2\beta\left(r\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\rho=\rho_0} d\beta = -2\pi D\left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} d\varphi.$$

Так как в месте встречи струи с шаром $\varphi = 0$, а в месте схода струи $\varphi = 2\rho_0^3$, то, принимая во внимание первое из неравенств (11), найдем следующую формулу для количества кислорода, поступившего в 1 сек. ко всей поверхности шара:

$$M = 2\pi D\int_0^{2\rho_0^3}\left(\frac{\partial c}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} d\varphi = 4\pi D\rho_0^3\int_0^1 f(\vartheta)\, d\vartheta = 4\pi D\rho_0^3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1} + \frac{2b_n}{2n+1}\right).$$

Средняя удельная скорость горения шара будет равна:

$$\bar{k}_s = \frac{M}{4\pi\rho_0^2} = \frac{kc_0}{\sqrt{3} + k/\alpha} S, \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2n+1} \frac{b_n}{b_0} + \frac{1}{2n+2} \frac{a_n}{b_0} \right]. \tag{15}$$

При $\theta = \infty$ будет: $S = 1$ и $\bar{k}_s = \alpha c_0$. Если $\theta = 0$, то $S = \sqrt{3}$ и $\bar{k}_s = kc_0$.

Последние утверждения можно доказать следующим образом. Очевидно, что уравнение $z = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} z^{3/2}$ имеет корнем число 3. С другой стороны, ряд Лагранжа дает:

$$\sqrt{z} = \sqrt{3} = 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{5}{54} + \frac{8}{81\sqrt{3}} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^n \frac{(3n-1)(3n-3)\cdots(n+3)}{2^n n!}.$$

Члены этого ряда одинаковы с членами ряда, находящегося в правой части (15), если $\theta = 0$.

3. Если положить, что $c_{\varphi=0} = c_0$ и $c_{\psi=0} = \bar{c}_w$, то решение уравнения (4) напишется так:

$$c = (c_0 - \bar{c}_w)\, \Phi\left(\frac{\psi}{\sqrt{4\delta\varphi}} \right) + \bar{c}_w,$$

где через $\Phi(x)$ обозначена функция Крампа. Количество кислорода, подведенного к поверхности шара в 1 сек., будет равно

$$M = 4\pi D \frac{c_0 - \bar{c}_w}{\sqrt{\pi\delta}} \sqrt{2\rho_0^3} = 4\pi\rho_0^2 \alpha (c_0 - \bar{c}_w).$$

откуда следует, что $\alpha = \sqrt{2Dv/\pi\rho_0}$.

Подставляя найденную величину α в формулу (2), получим среднюю скорость горения шара, даваемую этим способом подсчета ([1]). Заметим, что полученное сейчас значение α одинаково с тем, которое фигурировало в предыдущем параграфе.

4. Выводы, приведенные выше, показывают, что значения величины $\bar{k}_s / kc_0$, вычисленные по формулам (2) и (15), совпадают при достаточно больших и при достаточно малых значениях θ. При $\theta = 1$ величина отношения $\bar{k}_s / kc_0$, подсчитанная по формуле (15), равна 0,606, а вычисленная по формуле (2) 0,571. Повидимому, формулы (2) и (15) дают значения $\bar{k}_s$, которые различаются не больше чем на 5—6%.

В заключение нужно отметить, что первый путь решения рассмотренной задачи, приводящий к формуле (2), равноценен способу, который Д. А. Франк-Каменецкий ([5]) назвал методом равнодоступной поверхности. Данный способ еще в 1934 г. применяся одним из авторов данного сообщения ([6]).

Ленинградский институт
авиационного приборостроения

Поступило
31 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Блинов, Тр. Воронежск. гос. ун-та, 11, в. 1 (1939). [2] А. С. Предводителев, ЖТФ, **10**, в. 16 (1940). [3] В. С. Пушкин, ЖТФ, **18**, в. 1 (1948). [4] Boussinesq, Journ. de Math., **1** (1905). [5] Д. А. Франк-Каменецкий, Диффузия и теплопередача в химической кинетике, М.— Л., 1947. [6] В. И. Блинов, Изв. Всесоюзн. теплотехнич. ин-та, **7** (1934).