Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 5

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Л. М. ЧЕРНЫЙ

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗМЕЛЬЧЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 IV 1950)

А. Н. Колмогоровым (1) математически была обоснована общая схема процесса дробления, для которой в пределе возможно применение логарифмически нормального закона распределения частиц по их размерам при допущении, что распределение логарифмов размеров частиц не зависит от абсолютных размеров зерен, из которых они образовались.

Однако из теории и практики дробления известно, что гранулометрические характеристики продуктов измельчения зависят от размеров частиц исходного материала. Если учесть это обстоятельство, то для гранулометрических кривых распределения среднее квадратическое отклонение или дисперсию (квадрат среднего квадратического отклонения) можно рассматривать как функцию логарифма размера частиц.

Способ применения нормального закона Гаусса в случае переменной величины дисперсии был разработан С. Н. Бернштейном (2).

Если

$$z = \psi(x) = \frac{x - M}{\sqrt{B(x)}}, \tag{1}$$

где $\psi(x)$ есть возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$ функция величины x, M — медиана, $B(x)$ — дисперсионная функция и $z_i = \psi(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1)$, то вероятность каждого неравенства $x_l < x < x_k$ будет выражена интегралом

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\psi(x_l)}^{\psi(x_k)} e^{-z^2/2}\, dz. \tag{2}$$

Общая формула закона распределения с переменной величиной дисперсии имеет большое практическое значение, так как позволяет учитывать при анализе закономерностей массовых явлений некоторые постоянно действующие факторы, отклоняющие данное распределение от наиболее простого нормального распределения Гаусса.

Логарифмически нормальный закон распределения с переменной величиной дисперсии для расчета гранулометрических характеристик может быть выражен следующими формулами:

$$j_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z_i} e^{-z^2/2}\, dz = 0{,}5 \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{z_i} e^{-z^2/2}\, dz = 0{,}5 \pm \Phi(z), \tag{3}$$

Таблица 1

Фактические и расчетные гранулометрические характеристики некоторых диспергированных горных пород (суммарные выходы в %)

Расчетные формулы	Гранулометрические классы в микронах															
	−13320	−9423	−6680	−4699	−3327	−2362	−1651	−1168	−833	−589	−417	−295	−208	−147	−104	−74
Кварц после дробления в щековой дробилке																
Опытные данные	100,0	98,1	89,9	63,4	49,2	39,6	32,1	26,0	20,2	15,7	12,0	9,0	6,9	5,0	—	—
$j_i = 0,5 + \Phi(z)$	—	98,1	80,6	62,7	49,2	39,0	30,8	29,8	20,1	16,36	13,35	10,8	8,9	7,3	—	—
Розин и Раммлер	—	98,1	88,9	70,1	48,6	31,5	18,4	10,8	6,0	3,4	1,8	0,9	0,4	0,2	—	—
Годэн и Шуманн	—	98,1	78,0	61,5	48,9	38,8	30,6	24,4	19,4	15,4	12,3	9,75	7,74	6,12	—	—
Вейниг	101,3	99,4	89,1	70,3	53,9	38,1	26,5	18,1	12,7	10,0	7,8	6,4	5,6	5,0	—	—
Хэч	—	92,5	83,0	67,8	49,0	30,5	15,1	6,7	2,4	0,7	0,15	0,02	0,01	0,0001	—	—
Роллер	—	99,0	84,0	63,4	49,2	36,7	26,5	17,2	10,5	5,5	2,36	0,79	0,18	0,02	—	—
Фосфоритная руда после дробления на валках																
Опытные данные	87,1	51,5	34,9	26,4	23,5	—	18,8	16,5	15,6	14,8	12,6	11,8	8,3	4,9	—	—
$j_i = 0,5 \pm \Phi(z)$	87,0	51,5	40,6	33,4	30,0	—	21,4	18,8	16,1	14,8	13,2	11,7	10,6	9,5	—	—
Розин и Раммлер	83,8	51,4	24,6	10,2	1,5	—	0,8	0,1	—	—	—	—	—	—	—	—
Годэн и Шуманн	99,3	71,3	51,6	37,2	26,6	—	19,6	9,8	7,14	—	—	—	—	—	—	—
Вейниг	124,6	91,1	61,7	35,2	19,9	—	8,4	6,5	5,6	5,2	5,06	4,96	4,92	4,9	—	—
Хэч	87,5	82,5	75,7	68,1	59,6	—	41,5	33,0	25,5	19,8	13,4	9,1	5,8	3,6	—	—
Роллер	86,6	51,4	26,2	10,8	3,26	—	0,07	0,003	—	—	—	—	—	—	—	—
Ортоклаз после измельчения в истирателе																
Опытные данные	—	—	—	—	100,0	99,8	99,1	96,1	90,5	83,3	69,9	55,7	42,4	32,1	25,2	18,5
$j_i = 0,5 \pm \Phi(z)$	—	—	—	—	—	100,0	99,99	99,04	93,80	83,40	69,85	56,00	43,50	33,00	24,70	18,30
Розин и Раммлер	—	—	—	—	—	99,8	98,7	95,6	89,4	79,3	67,9	55,6	43,8	33,7	25,1	20,0
Годэн и Шуманн	—	—	—	—	—	100,0	91,0	12,5	75,2	68,5	62,2	56,5	51,4	46,5	42,4	38,6
Вейниг	—	—	—	—	122,5	122,3	119,8	111,2	97,3	81,6	66,5	53,4	42,2	32,5	24,7	18,5
Хэч	—	—	—	—	—	99,8	99,16	97,4	93,38	85,31	72,57	55,79	38,10	22,36	11,31	4,95
Роллер	—	—	—	—	—	168,0	140,0	118,0	100,0	83,3	69,9	58,3	48,4	40,3	33,3	27,2

Кварц после измельчения падающим шаром

Опытные данные	—	—	—	—	—	—	—	—	100,0	57,8	32,0	21,3	—	9,3	—	4,5
$j_i = 0,5 \pm \Phi(z)$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	57,8	31,9	21,2	—	10,6	—	5,8
Розин и Раммлер	—	—	—	—	—	—	—	—	—	57,6	32,1	16,6	—	3,5	—	0,8
Годэн и Шуманн	—	—	—	—	—	—	—	—	—	56,5	32,1	18,3	—	5,6	—	3,8
Вейниг	—	—	—	—	—	—	—	—	—	46,1	20,3	9,6	—	4,9	—	4,5
Хэч	—	—	—	—	—	—	—	—	—	57,9	43,1	29,2	—	9,1	—	1,9
Роллер	—	—	—	—	—	—	—	—	—	57,8	32,0	16,6	—	1,9	—	0,03

$$z_i = \frac{i\ 8x1M-}{\sqrt{B(x_i)}} \lg \qquad (3,1)$$

где j_i — суммарный выход по минусовой фракции, соответствующий данному значению $\lg x_i$; $\lg x_i$ — логарифм линейного размера частиц; $\lg M$ — медиана; $B(x_i)$ — дисперсионная функция. В уравнении (3) $\Phi(z)$ берется со знаком плюс, если $j_i > 0,5$, и со знаком минус, если $j_i < 0,5$.

Экспериментальная проверка показала, что для гранулометрических характеристик твердых тел, если принять во внимание практически существующие колебания в выходах, между дисперсией $B(x_i)$ и логарифмом линейного размера частиц имеется прямолинейная зависимость.

Следовательно:

$$B(x_i) = l + q \lg x_i, \qquad (3,2)$$

$$z_i = \frac{\lg x_i - \lg M}{\sqrt{B(x_i)}} = \frac{\lg x_i - \lg M}{\sqrt{l + q \lg x_i}} = \frac{\lg x_i - \lg M}{\sqrt{\lg \beta - q(\lg x_i - \lg M)}}, \qquad (4)$$

где константы $\lg M$, q, β могут быть найдены из следующих формул С. Н. Бернштейна [2]:

$$\frac{(\lg x_1 - \lg M)^2}{z_1^2}(\lg x_3 - \lg x_2) + \frac{(\lg x_2 - \lg M)^2}{z_2^2}(\lg x_1 - \lg x_3) + \frac{(\lg x_3 - \lg M)^2}{z_3^2}(\lg x_2 - \lg x_1) = 0, \qquad (5)$$

$$q = \frac{\frac{y_3^2}{z_3^2} - \frac{y_1^2}{z_1^2}}{y_3 - y_1}, \qquad (6)$$

$$\lg \beta = y_1 y_3 \frac{\frac{y_1}{z_1^2} - \frac{y_3}{z_3^2}}{y_3 - y_1}, \qquad (7)$$

$$y_1 = \lg x_1 - \lg M, \quad y_3 = \lg x_3 - \lg M, \qquad (8)$$

$\lg x_1$, $\lg x_2$, $\lg x_3$ — логарифмы линейных размеров частиц, соответствующих значениям z_1, z_2, z_3, причем $|z_2| < |z_1|$ и $|z_2| < |z_3|$. Значения z_1, z_2, z_3 могут быть найдены из таблиц [2] для $\Phi(z)$, если известны соответствующие им значения j_1, j_2, j_3.

Константа $\lg M$ может быть также легко определена графическим методом, если j_3 меньше 0,5. Зная константы гранулометрической кривой, можно рассчитать суммарные выходы, соответствующие любым размерам частиц.

Проверка и сравнение формулы (3) с другими расчетными формулами были проведены для многих мономинеральных и полиминеральных пород после их дробления или измельчения в различных дробильных машинах.

В табл. 1 приводятся фактические и расчетные гранулометрические анализы для некоторых диспергированных различным образом горных пород. Расчетные гранулометрические характеристики вычислялись по формуле (3), по формуле Розина и Раммлера [3], по формуле Годэна и Шуманна [4], по формуле Вейнига [5], по формуле Хэча [6] и по формуле Роллера [7].

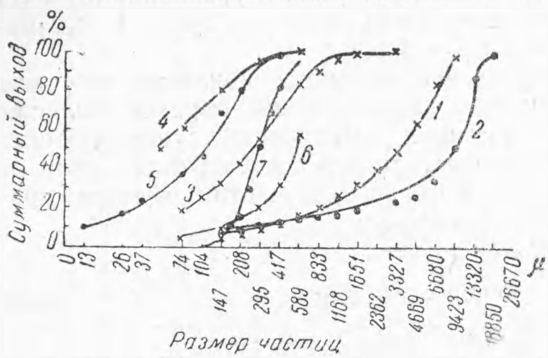

Рис. 1. Расчетные гранулометрические кривые распределения: *1* — кварц после дробления в щековой дробилке; *2* — фосфоритная руда после дробления на валках; *3* — ортоклаз после измельчения в истирателе; *4* — магнетитовая руда после измельчения в шаровой мельнице; *5* — фосфоритная руда после измельчения в шаровой мельнице; *6* — кварц после измельчения падающим шаром; *7* — кварцевый песок (не дробленый). Точки — данные опытов

Результаты сравнения фактических и рассчитанных по формуле (3) гранулометрических характеристик некоторых продуктов показаны также на рис. 1.

Из табл. 1 и рис. 1 следует, что наиболее точной из проверенных нами формул является формула с переменной величиной дисперсии, основанная на логарифмически нормальном законе распределения частиц при дроблении, несмотря на то, что расчеты параметров делались без применения закона наименьшей суммы квадратов ошибок.

В дальнейших исследованиях необходимо проверить формулу (3) для других дробленых материалов и дать математическую оценку ее и других формул для расчета гранулометрических характеристик.

Государственный научно-исследовательский институт горно-химического сырья

Поступило 12 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, ДАН, **31**, № 2 (1941). [2] С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, М., 1946, стр. 342. [3] Rosin, Rammler u. Sperling, Ber. d. Reichkohlenrats, Berlin, C. F. 2 (1933). [4] A. M. Gaudin, Trans. A. I. M. E., **73**, 253 (1926); R. Schumann, Mining Technology, 4, No. 4, 1 (1940). [5] A. J. Weinig, Colorado School of Mines Quarterly, **28**, 112 (1933). [6] T. Gatch, Journ. Franklin Inst., **215**, 27 (1933). [7] P. S. Roller, ibid., **223**, No. 5, 609 (1937).