Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ЯНЕНКО

СТРУКТУРА ИЗГИБАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 IV 1950)

В настоящей работе обобщаются и усиливаются результаты, изложенные в наших заметках ([1], [2]).

Рассмотрим в евклидовом пространстве E_{m+q} пару поверхностей V_m, $\bar{V}_m$, которые будем предполагать трижды дифференцируемыми. Если между ними можно установить точечное взаимно-однозначное дифференцируемое соответствие $V_m \backsim \bar{V}_m$ так, что в соответствующих точках будем иметь $ds^2 = d\bar{s}^2$, то поверхности V_m, $\bar{V}_m$ называются изометричными, соответствие $V_m \backsim \bar{V}_m$ — изометрией или изгибанием. Изгибание $V_m \backsim \bar{V}_m$ будем называть соизгибанием, если выполняются условия: 1) $V_m \subset V_{m+s}$, $\bar{V}_m \subset \bar{V}_{m+s}$, $0 < s < q$; 2) $V_{m+s} \backsim \bar{V}_{m+s}$; 3) изометрия $V_{m+s} \backsim \bar{V}_{m+s}$ переходит на V_m в изометрию $V_m \backsim \bar{V}_m$. Изгибание, не являющееся соизгибанием, назовем собственным.

Подповерхность $V_{m-p} \subset V_m$ будем называть элементом конгруентности, если изометрия $V_m \backsim \bar{V}_m$ на V_{m-p} вырождается в конгруентность.

В силу нашего предположения трижды дифференцируемости, поверхности V_m, $\bar{V}_m$ можно оснастить дважды дифференцируемыми единичными ортогональными реперами (I), соответственно (J), так что будем иметь:

$$dr = \sum_{\alpha=1}^{m+q} \omega^\alpha I_\alpha, \quad d\bar{r} = \sum_{\alpha=1}^{m+q} \Omega^\alpha J_\alpha, \quad \omega^{m+s} = \Omega^{m+s} = 0, \ s = 1, \ldots, q;$$

$$dI_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m+q} \omega_\alpha^\beta I_\beta, \quad dJ_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m+q} \Omega_\alpha^\beta J_\beta, \quad \alpha = 1, \ldots, m+q.$$

Здесь ω^α, ω_β^α, Ω^α, Ω_β^α суть формы Картана поверхности V_m, соответственно $\bar{V}_m$, удовлетворяющие обычным условиям интегрируемости; $I_1, \ldots, I_m$ $(J_1, \ldots, J_m)$ — касательные, $I_{m+1}, \ldots, I_{m+q}$ $(J_{m+1}, \ldots, J_{m+q})$ — нормальные векторы.

Поворотом касательных векторов можно добиться в случае изометрии равенств:

$$\omega^\alpha = \Omega^\alpha, \ \alpha = 1, \ldots, m+q, \qquad \omega^{m+s} = 0, \ s = 1, \ldots, q. \tag{1}$$

Дифференциальные следствия отсюда приводят к равенствам:

$$\omega_j^i = \Omega_j^i, \quad i, j = 1, \ldots, m;$$

$$\sum_{s=1}^{q} [\omega_i^{m+s} \omega_j^{m+s}] = \sum_{s=1}^{q} [\Omega_i^{m+s} \Omega_j^{m+s}], \quad i, j, \ldots, m. \tag{2}$$

Совместный ранг форм ω_i^{m+s}, Ω_j^{m+t} $(s, t = 1, \ldots, q;\ i, j = 1, \ldots, m)$ будем называть рангом изгибания r.

Ясно, что ранг поверхности (число параметров, от которого зависит q-вектор нормали) не превосходит ранга изгибания.

Дальнейшим поворотом касательных векторов $I_1, \ldots, I_m$, $J_1, \ldots, J_m$ можем добиться того, что формы Картана ω_β^α, Ω_β^α изометрических поверхностей V_m, $\overline{V}_m$ будут удовлетворять, кроме соотношений (1), (2), также соотношениям:

$$\omega_\alpha^{m+s} = \Omega_\alpha^{m+s} = 0, \quad s = 1, \ldots, q, \quad \alpha = r+1, \ldots, m; \tag{3}$$

$$\omega_i^{m+s} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij}^s \omega^j, \quad \lambda_{ij}^s = \lambda_{ji}^s, \quad s = 1, \ldots, q, \quad i, j = 1, \ldots, r \leqslant m;$$

$$\Omega_i^{m+s} = \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij}^s \omega^j, \quad \mu_{ij}^s = \mu_{ji}^s, \quad s = 1, \ldots, q, \quad i, j = 1, \ldots, r. \tag{4}$$

При выбранном нами положении репера система уравнений

$$\omega^1 = \omega^2 = \ldots = \omega^r = 0$$

является вполне интегрируемой и определяет расслоение поверхности V_m на ∞^r плоскостей E_{m-r} (образующих), вдоль которых нормальный q-вектор $I_{m+1}, \ldots, I_{m+q}$ является постоянным (аналогичное имеет место для поверхности $\overline{V}_m$).

Сформулируем предварительно следующие две теоремы, из которых первая имеет чисто алгебраический характер.

Теорема 1. *Систему смешанных форм* ω_i^{m+s}, Ω_j^{m+t} $(s, t = 1, \ldots, q;$ $i, j = 1, \ldots, r)$, *удовлетворяющих соотношениям* (2)

$$\sum_{s=1}^{q} [\omega_i^{m+s} \omega_j^{m+s}] = \sum_{s=1}^{q} [\Omega_i^{m+s} \Omega_j^{m+s}],$$

поворотом векторов $I_1, \ldots, I_r$ *можно привести к виду*:

$$\omega_i^{m+s} = \Omega_i^{m+s} \quad \mathrm{mod}\, u^1 \ldots u^{2q-p}, \quad s = 1, \ldots p, \quad i = 1, \ldots, r;$$

$$\omega_i^{m+t} = \Omega_i^{m+t} = 0 \ \ \mathrm{mod}\, u^1 \ldots u^{2q-p}, \quad t = p+1, \ldots, q, \quad i = 1, \ldots, r,$$

где $u^1, \ldots, u^{2q-p}$ — *система* $2q-p$ *линейно независимых форм,* p — *некоторое целое число от* 0 *до* q.

Теорема 2. *Если* r *есть ранг изгибания* $V_m \backsim \overline{V}_m$ *и система смешанных форм* ω_i^{m+s}, Ω_j^{m+t} $(s, t = 1, \ldots, q;\ i, j = 1, \ldots, r)$ *удовлетворяет соотношениям*

1) $\omega_i^{m+s} = \Omega_i^{m+s} \ \ \mathrm{mod}\, u^1 \ldots u^{r_0}, \quad s = 1, \ldots, p > 0 \quad i = 1, \ldots, r;$

$\omega_i^{m+t} = \Omega_i^{m+t} = 0 \ \ \mathrm{mod}\, u^1 \ldots u^{r_0}, \quad t = p+1, \ldots, q, \quad i = 1, \ldots, r,$

где $u^1, \ldots, u^{r_0}$ — r_0 *линейно независимых форм, и*

2) $r_0 < r$,
то изгибание $V_m \backsim \bar{V}_m$ есть соизгибание, которое вырождается в конгруентность $V_m \equiv \bar{V}_m$ в случае $p = q$.

На основании теорем 1 и 2 можно сформулировать следующую основную теорему:

Теорема 3 (теорема о соизгибании). *Если ранг изгибания $> 2q$, то изгибание является соизгибанием.*

Отсюда, в частности, для изгибаемой поверхности получим альтернативу: изгибаемая поверхность должна иметь малый ранг ($r \leqslant 2q$) или же, в противном случае, принадлежать изгибаемой поверхности высшей размерности V_{m+s} ранга $\leqslant 2(q-s)$ и изгибаться вместе с последней.

Легко получаем отсюда следствия:

1. Изгибаемая поверхность допускает в случае соизгибания расслоение на ∞^{2p} элементов конгруентности V_{m-2p}, каждый из которых есть поверхность класса $q-p$. В противном случае V_m допускает расслоение на ∞^{2q} элементов конгруентности E_{m-2q} (плоскостей).

2. Метрика V_m с неоднозначно определенным вложением допускает расслоение на ∞^{2p} метрик класса $2(q-p)$ (p заключено между 0 и q).

Как следствие из теоремы 1 получаем теорему:

Теорема Аллендорфера [3]. *Изгибаемая поверхность имеет тип* $t \leqslant 2$ (см. [1]).

Полученные нами необходимые признаки носят проективно-инвариантный характер и характеризуют проективную структуру изгибаемых поверхностей. Таким образом выделяется проективно-инвариантный класс поверхностей, содержащий в себе класс изгибаемых поверхностей.

Поступило
24 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Яненко, ДАН, 64, № 5 (1949). [2] Н. Н. Яненко, ДАН, 65, № 4 (1949). [3] C. B. Allendoerfer, Am. Journ. Math., 61, No. 3, 633 (1939).