Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 5

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

О СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 IV 1950)

Примем следующие обозначения: $\widetilde{C}$ — пространство функций $f(x, y)$, определенных и непрерывных при всех вещественных x и y, 2π-периодических по x и по y, с нормой

$$\|f\|_{\widetilde{C}} = \max_{(x,\, y)} |f(x, y)|.$$

n, m — целые неотрицательные числа.

$$s_{n,m}(f) \equiv s_{n,m}(f, x, y) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u,\ y+v) \frac{\sin(n+{}^1/_2)\, u \cdot \sin(m+{}^1/_2)\, v}{4 \sin{}^1/_2\, u \cdot \sin{}^1/_2\, v}\, du\, dv$$

частная сумма порядка (n, m) двойного ряда Фурье функции f. Ω — множество функций $\omega(u)$, удовлетворяющих следующим четырем условиям: 1) $\omega(u)$ непрерывна при $0 \leqslant u < \infty$, 2) $0 < \omega(u') \leqslant \omega(u'')$ при $0 < u' \leqslant u''$, 3) $\omega(u_1 + u_2) \leqslant \omega(u_1) + \omega(u_2)$, 4) $\omega(0) = 0$.

При $\omega_1 \in \Omega$, $\omega_2 \in \Omega$ обозначим через $\widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$ множество тех функций $\in \widetilde{C}$, для которых при всех вещественных x, y, α, β имеем

$$|f(x+\alpha, y+\beta) - f(x, y)| \leqslant A\omega_1(|\alpha|) + B\omega_2(|\beta|),$$

где A и B — константы, зависящие от f. Если $\omega_2(u) \equiv u$, то пишем $\widetilde{C}_{\omega_1, u}$ вместо $\widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$.

Пусть Π есть некоторое множество пар (n, m) неотрицательных целых чисел. Это множество пар будем называть **неособенным**, если, каково бы ни было $N > 0$, найдется пара $(n, m) \in \Pi$ такая, что $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$.

Если Π есть неособенное множество пар, а $s_{n,m}$ — числа, определенные при $(n, m) \in \Pi$, то полагаем

$$\underline{\lim}_{\Pi}\, s_{n,m} \equiv \lim_{N \to \infty} \inf_{\substack{n \geqslant N \\ m \geqslant N \\ (n,m) \in \Pi}} s_{n,m}; \qquad \overline{\lim}_{\Pi}\, s_{n,m} \equiv \lim_{N \to \infty} \sup_{\substack{n \geqslant N \\ m \geqslant N \\ (n,m) \in \Pi}} s_{n,m}.$$

Наконец, полагаем

$$\lim_{\Pi} s_{n,m} = \underline{\lim}_{\Pi}\, s_{n,m} = \overline{\lim}_{\Pi}\, s_{n,m},$$

если последние два числа равны. Очевидно, что $\lim\limits_{\Pi} s_{n,m} = s$ означает, что $s_{n,m}$ стремится к пределу s, когда n и m оба безгранично возрастают так, что $(n, m) \in \Pi$.

Теорема 1. *Пусть* $\omega_1 \in \Omega$, $\omega_2 \in \Omega$, $\lim\limits_{u \to 0+} \frac{u}{\omega_i(u)} = 0$ $(i = 1, 2)$ *и пусть* Π *есть некоторое неособенное множество пар* (n, m) *неотрицательных целых чисел.*

Тогда:

1) *Если одновременно выполнены условия*

$$\lim_{\Pi} \min\left[\omega_1\left(\frac{1}{n}\right), \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right] \log n \cdot \log m = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{\Pi} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \log n = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{\Pi} \omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \log m = 0, \tag{3}$$

то для любой функции $f \in \widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$ *имеем*

$$\lim_{\Pi} \| f - s_{n,m}(f) \|_{\widetilde{C}} = 0. \tag{4}$$

2) *Если хоть одно из условий* (1) – (3) *не выполнено, то найдется функция* $f \in \widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$ *такая, что предел*

$$\lim_{\Pi} s_{n,m}(f, 0, 0) \tag{5}$$

не существует.

Замечание. Если Π есть множество всех пар (n, m), то (2) и (3) следуют из (1).

Из теоремы 1 и этого замечания вытекает

Теорема 2. *Пусть* $\omega_1 \in \Omega$, $\omega_2 \in \Omega$ *и* $\lim\limits_{u \to 0+} \frac{u}{\omega_i(u)} = 0$ $(i = 1, 2)$.

Тогда:

1) *Если*

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \min\left[\omega_1\left(\frac{1}{n}\right), \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right] \log n \cdot \log m = 0, \tag{6}$$

то для любой функции $f \in \widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$ *имеем*

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \| f - s_{n,m}(f) \|_{\widetilde{C}} = 0. \tag{7}$$

2) *Если*

$$\overline{\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}}} \min\left[\omega_1\left(\frac{1}{n}\right), \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right] \log n \cdot \log m > 0, \tag{8}$$

то найдется функция $f \in \widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$ *такая, что*

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} s_{n,m}(f, 0, 0) \tag{9}$$

не существует.

При $\lambda > 1$ обозначим через Π_λ множество всех пар натуральных чисел (n, m), для которых $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$.

Из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Пусть* $\omega_1 \in \Omega$, $\omega_2 \in \Omega$ *и* $\lim\limits_{u \to 0+} \frac{u}{\omega_i(u)} = 0$ $(i = 1, 2)$.

Тогда следующие факты равносильны:

1) *Для любой функции $f \in \widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$ имеем*

$$\lim_{n \to \infty} \| f - s_{n,n}(f) \|_{\widetilde{C}} = 0. \tag{10}$$

2) *При всяком $\lambda > 1$ для любой функции $f \in \widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$ имеем*

$$\lim_{\mathrm{II}_\lambda} \| f - s_{n,m}(f) \|_{\widetilde{C}} = 0. \tag{11}$$

3) *Выполнены три условия*

$$\lim_{n \to \infty} \min \left[\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right), \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \right] \log^2 n = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{n \to \infty} \omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) \log n = 0, \tag{13}$$

$$\lim_{n \to \infty} \omega_2 \left(\frac{1}{n} \right) \log n = 0. \tag{14}$$

Рассмотрим некоторые следствия из теоремы 2.

1) Если $\omega_1(u) = o\left(\frac{1}{\log^2 \frac{1}{u}} \right)$ и $\omega_2(u) = o\left(\frac{1}{\log^2 \frac{1}{u}} \right)$ при $u \to 0+$, то для любой функции $f \in \widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$ имеем (7).

2) Если $\omega_2(u) \sim \frac{1}{\log^2 \frac{1}{u}}$ при $u \to 0+$, то для того, чтобы для любой функции $f \in \widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$ выполнялось (7), необходимо и достаточно, чтобы $\omega_1(u) = o\left(\frac{1}{\log^2 \frac{1}{u}} \right)$.

3) Если $p > 2$ и $\omega_2(u) \sim \frac{1}{\log^p \frac{1}{u}}$ при $u \to 0+$, то для того, чтобы для любой функции $f \in \widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$ имели (7), необходимо и достаточно, чтобы $\omega_1(u) = o\left(\frac{1}{\log^q \frac{1}{u}} \right)$, где $q = \frac{p}{p-1}$.

4) Если $\omega_2(u) = u^\gamma$, где $0 < \gamma < 1$, то для того, чтобы для любой функции $f \in \widetilde{C}_{\omega_1, \omega_2}$ имели (7), необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega_1(u) = o\left(\frac{1}{\log \frac{1}{u} \cdot \log \log \frac{1}{u}} \right). \tag{15}$$

Теорема 4. *Пусть $\omega_1 \in \Omega$.*

Тогда для того, чтобы для любой функции $f \in \widetilde{C}_{\omega_1, u}$ имели (7), необходимо, чтобы

$$\omega_1(u) = O\left(\frac{1}{\log \frac{1}{u} \cdot \log \log \frac{1}{u}} \right)$$

и достаточно, чтобы выполнялось (15).

Поступило
3 IV 1950