Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 5

МАТЕМАТИКА

В. И. КОРОВИН

РАССЛОЕНИЕ ПАРЫ КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 15 IV 1950)

Рассмотрим комплекс (трехпараметрическое семейство), описанный координатной двумерной плоскостью $P(A_1, A_2, A_3)$ репера с вершинами A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ в пятимерном проективном пространстве Π_5.

Инфинитезимальные перемещения репера будем определять уравнениями

$$dA_i = \omega_i^k A_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Здесь ω_i^k — формы Пфаффа от дифференциалов трех главных параметров; из них $\omega_1^4, \omega_2^5, \omega_3^6, \omega_1^5, \omega_1^6, \omega_2^4, \omega_2^6, \omega_3^4, \omega_3^5$ — главные компоненты первого порядка инфинитезимального перемещения репера, между которыми существует шесть линейных соотношений. Эти соотношения при подходящем выборе точек A_1, A_2 и A_3 в плоскости комплекса и точек A_4, A_5 и A_6 в соответствующей плоскости второго комплекса могут быть приведены к виду:

$$\begin{gathered}\omega_1^5 = a_2\omega_2^5, \quad \omega_2^6 = a_3\omega_3^6, \quad \omega_1^6 = b_2\omega_2^5, \\ \omega_3^4 = a_1\omega_1^4, \quad \omega_2^4 = b_3\omega_3^6, \quad \omega_3^5 = b_1\omega_1^4.\end{gathered} \tag{1}$$

Пусть $M = A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3$ — точка плоскости $P(A_1, A_2, A_3)$, где λ и μ — функции главных параметров (u, v, w). Каждая точка M плоскости при изменении u, v, w описывает трехмерное многообразие в Π_5. Рассматривая, кроме того, λ и μ как функции двух параметров, мы получим двупараметрическое семейство трехмерных многообразий в плоскости P.

Два комплекса P и P' двумерных плоскостей будем называть расслояемыми, если к комплексам P и P' можно присоединить два двупараметрических семейства трехмерных многообразий Σ и Σ' так, что касательные трехмерные плоскости трехмерного многообразия Σ в точке M, принадлежащей плоскости P, проходят через соответствующую плоскость P' и наоборот.

Касательная трехмерная плоскость определяется четырьмя точками. Если пятая точка принадлежит ей, то ее координаты должны линейно выражаться через координаты этих четырех точек. Поэтому для того, чтобы касательные трехмерные плоскости трехмерных многообразий Σ проходили через плоскость P', нужно, чтобы все детерминанты пятого порядка матрицы из координат точек M, dM, A_4, A_5, A_6 были равны нулю.

Приравнивая к нулю детерминанты пятого порядка, получим два независимых уравнения:

$$
\begin{aligned}
d\lambda &= \lambda(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \omega_1^2 - \mu\omega_3^2 + \lambda^2\omega_2^1 + \lambda\mu\omega_3^1, \\
d\mu &= \mu(\omega_1^1 - \omega_3^3) - \omega_1^3 - \lambda\omega_2^3 + \mu^2\omega_3^1 + \lambda\mu\omega_2^1.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Эта система определяет семейство многообразий и, следовательно, должна быть вполне интегрируема, поэтому внешние дифференциалы должны быть следствием самой системы. Дифференцируем внешним образом уравнения (2) и заменяем дифференциалы по формулам (2). Полученные после этого уравнения должны тождественно удовлетворяться относительно λ и μ. Следовательно, коэффициенты при различных степенях λ и μ равны нулю.

Выписывая аналогичные уравнения для трехмерных многообразий Σ' и плоскости P, получим систему 16 внешних квадратичных уравнений, которая будет определять расслояемую пару комплексов (P, P').

Если все коэффициенты a_i, b_k системы (1) не равны нулю, то система внешних квадратичных уравнений приводит к соотношениям

$$
\omega_4^1 = \omega_4^2 = \omega_4^3 = \omega_5^1 = \omega_5^2 = \omega_5^3 = \omega_6^1 = \omega_6^2 = \omega_6^3 = 0. \tag{3}
$$

Система (3) вполне интегрируема, но плоскость $P(A_4, A_5, A_6)$ неподвижна, и мы получим вырожденный случай расслоения.

Если $a_1 = a_2 = b_2 = b_3 = 0$ и a_3 и b_1 не равны нулю, уравнения (1) и квадратичные приводят к системе

$$
\begin{gathered}
\omega_1^5 = \omega_1^6 = \omega_2^4 = \omega_3^4 = \omega_4^2 = \omega_4^3 = \omega_5^1 = \omega_5^2 = \omega_5^3 = \omega_6^1 = \omega_6^2 = \omega_6^3 = 0, \\
\omega_3^5 = b_1\omega_1^4, \quad \omega_2^6 = a_3\omega_3^6, \quad [\omega_4^1\,\omega_1^4] = 0.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Система (4) в инволюции и имеет решение с произволом одной функции трех аргументов. Здесь мы также имеем случай вырожденного расслоения, так как плоскость $P(A_4, A_5, A_6)$ описывает однопараметрическое семейство.

Рассмотрим теперь комплекс $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Мы получим систему Пфаффа

$$
\begin{gathered}
\omega_1^5 = \omega_1^6 = \omega_2^4 = \omega_2^6 = \omega_3^4 = \omega_3^5 = 0, \\
\omega_4^2 = \omega_4^3 = \omega_5^1 = \omega_5^3 = \omega_6^1 = \omega_6^2 = 0,
\end{gathered} \tag{5}
$$

откуда, после внешнего дифференцирования и раскрытия по лемме Картана, будем иметь

$$
\begin{gathered}
\omega_4^1 = a_4^1\omega_1^4, \quad \omega_5^2 = b_5^2\omega_2^5, \quad \omega_6^3 = c_6^3\omega_3^6, \\
\omega_5^4 = a_4^5\omega_1^4 + b_4^5\omega_2^5, \qquad \omega_2^1 = a_2^1\omega_1^4 + b_2^1\omega_2^5, \qquad \omega_3^1 = a_3^1\omega_1^4 + c_3^1\omega_3^6, \\
-\omega_1^2 = b_4^5\omega_1^4 + b_1^2\omega_2^5, \quad -\omega_5^4 = b_2^1\omega_1^4 + b_5^4\omega_2^5, \quad -\omega_6^4 = c_3^1\omega_1^4 + c_6^4\omega_3^6, \\
\omega_4^6 = a_4^6\omega_1^4 + c_4^6\omega_3^6, \qquad \omega_5^6 = b_5^6\omega_2^5 + c_5^6\omega_3^6, \qquad \omega_3^2 = b_3^2\omega_2^5 + c_3^2\omega_3^6, \\
-\omega_1^3 = c_4^6\omega_1^4 + c_1^3\omega_3^6, \quad -\omega_2^3 = c_5^6\omega_2^5 + c_2^3\omega_3^6, \quad -\omega_5^6 = c_3^2\omega_2^5 + c_6^5\omega_3^6.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Коэффициенты a_i^k, b_i^k, c_i^k являются новыми неизвестными функциями, удовлетворяющими системе конечных соотношений

$$\begin{gathered} a_4^1 b_4^5 - a_2^1 b_5^2 = 0, \quad a_4^1 c_1^3 - a_4^6 c_6^3 = 0, \quad b_5^2 c_2^3 - b_5^6 c_6^3 = 0, \\ a_4^1 b_1^2 - a_4^5 b_5^2 = 0, \quad a_4^1 c_6^4 - a_3^1 c_6^3 = 0, \quad b_5^2 c_6^5 - b_3^2 c_6^3 = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Система (6) и (7) в инволюции и имеет решение с произволом 15 функций одного аргумента.

Геометрический смысл

1. Асимптотические линии трехмерных многообразий, описываемы х точками A_1 и A_4, определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} a_4^5 (\omega_1^4)^2 - b_1^2 (\omega_2^5)^2 = 0, \\ a_4^6 (\omega_1^4)^2 - c_1^3 (\omega_3^6)^2 = 0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a_4^1 (\omega_1^4)^2 - b_5^2 (\omega_2^5)^2 = 0, \\ a_4^1 (\omega_1^4)^2 - c_3^3 (\omega_3^6)^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

В силу (7) уравнения (8) и (9) совпадают, следовательно, асимптотические линии многообразий (A_1) и (A_4) соответствуют друг другу. Точно так же асимптотические линии многообразий (A_2) и (A_5), (A_3) и (A_6) соответствуют друг другу.

2. Точки $M = xA_1 + yA_2 + zA_3$ семейства плоскостей $P(A_1, A_2, A_3)$ будем называть фокусами, если при перемещении вдоль семейства они удовлетворяют соотношению

$$dM = \lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3, \tag{9}$$

где λ, μ, ν — произвольные функции.

Если семейство плоскостей имеет фокусы, то будем его называть фокальным.

Теорема. *Комплекс двумерных плоскостей $P(A_1, A_2, A_3)$ можно разложить на однопараметрические фокальные семейства. Геометрическое место фокусов различных фокальных семейств образует на плоскости P кривую третьего порядка.*

Для особого комплекса (5), (6), (7) имеем теорему:

Геометрическое место фокусов плоскости $P(A_1, A_2, A_3)$ есть тройка прямых $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, где x, y и z — однородные координаты точки $M = xA_1 + yA_2 + zA_3$ плоскости $P(A_1, A_2, A_3)$.

Фокальные семейства, соответствующие фокусам, расположенным на прямых $x = 0$, $y = 0$ или $z = 0$, определяются, соответственно, парами уравнений

$$\omega_2^5 = \omega_3^6 = 0, \quad \omega_1^4 = \omega_3^6 = 0 \quad \text{или} \quad \omega_1^4 = \omega_2^5 = 0. \tag{10}$$

Геометрическое место фокусов плоскости $P'(A_4, A_5, A_6)$ есть тройка прямых $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, где x_1, y_1, z_1 — однородные координаты точки $M = x_1A_4 + y_1A_5 + z_1A_6$ плоскости $P'(A_4, A_5, A_6)$. Соответствующие фокальные семейства определяются уравнениями (10). Таким образом, фокальные семейства плоскостей P и P' соответствуют друг другу.

3. Асимптотические линии трехмерного многообразия, описываемого точкой $M = A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3$ плоскости $P(A_1, A_2, A_3)$, определяются уравнениями

$$\omega_6^3 \omega_3^6 - \omega_4^1 \omega_1^4 = 0, \quad \omega_5^2 \omega_2^5 - \omega_4^1 \omega_1^4 = 0. \tag{11}$$

Асимптотические линии трехмерного многообразия, описываемого точкой $M = A_4 + \lambda_1 A_5 + \mu_1 A_6$ плоскости $P'(A_4, A_5, A_6)$, определяются теми же уравнениями. Следовательно, асимптотические линии трехмерных многообразий, описываемых точками M и M' плоскостей P и P', соответствуют друг другу.

4. Точки A_1, A_2, A_3 — особые точки, для которых фокальные семейства будут двупараметрическими. Именно, для точки A_1 фокальное семейство определяется одним уравнением $\omega_1^4 = 0$; для точки A_2 $\omega_2^5 = 0$, для точки A_3 $\omega_3^6 = 0$.

Каждое из этих уравнений вполне интегрируемо, следовательно, определяет конгруенцию плоскостей P. Точки A_1, A_2, A_3 при этом описывают двумерные поверхности, для которых плоскость $P(A_1, A_2, A_3)$ является касательной плоскостью.

В заключение приношу большую благодарность проф. С. П. Финикову, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Поступило
12 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Метод Картана, 1948.