Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Х. Л. СМОЛИЦКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 V 1950)

1. Пусть Ω есть область n-мерного пространства $y_1, \ldots, y_n$, ограниченная достаточно гладкой замкнутой поверхностью S. Пусть $u(y_1, \ldots, y_n, t)$ l раз $(l \geqslant 2)$ непрерывно дифференцируема в области $\overline{\Omega} = \Omega + S$, $t \geqslant 0$. Положим

$$\Box u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(y, t);$$

$$u\,|_S = \psi(y, t); \quad u\,|_{t=0} = u_0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1 \tag{1}$$

и через $F_k(t)$, U_0^k, U_1^k обозначим интегралы по Ω от суммы квадратов всех производных до порядка k включительно от $f(y, t)$ (по $y_1, \ldots, y_n$ и t), u_0 и u_1 (по $y_1, \ldots, y_n$).

В каждой точке поверхности S выберем местную систему прямоугольных координат $x_1, \ldots, x_n$, направив x_n по внешней нормали к S и $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — в касательной плоскости. Тогда в окрестности каждой точки поверхности S $\psi(y, t)$ есть функция $x_1, \ldots, x_{n-1}, t$, и мы положим

$$\Psi_k(t) = \int_S \sum_{m=0}^{k} \sum_{s=0}^{m} \sum_{i_1, \ldots, i_{m-s}=1}^{n-1} \left[\frac{\partial^m \psi}{\partial t^s \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{m-s}}} \right]^2 dS.$$

Обозначим

$$I_{r, \alpha} = \int_\Omega \sum_{i_1, \ldots, i_r=1}^{n} \left[\frac{\partial^{r+\alpha} u}{\partial t^\alpha \partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_r}} \right]^2 d\Omega. \tag{2}$$

Пусть $t_0 > 0$. Мы доказываем:

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} I_{r, \alpha} \leqslant A_k(t_0) \max \left[U_0^k,\ U_1^{k-1},\ \max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} F_k(t),\ \max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \Psi_{k+1}(t)\right] = A_k(t_0)\, M^2$$
$$(0 \leqslant r + \alpha \leqslant k < l), \tag{3}$$

где $A_k(t_0)$ не зависит от выбора функции $u(y_1, \ldots, y_n, t)$.

Если $f \equiv 0$, $\psi \equiv 0$, то A_k не зависит от t_0, и тогда имеем

$$\sup_{0 \leqslant t < \infty} I_{r, \alpha}(t) \leqslant A_k \max \left[U_0^k,\ U_1^{k-1}\right] \quad (0 \leqslant r + \alpha \leqslant k < l). \tag{4}$$

Если $f \equiv 0$ в некоторой области, прилегающей к S, то в (3) следует F_k заменить на F_{k-1}.

Неравенство (4) для $k=2$ и аналогично (3) для уравнений с переменными коэффициентами были ранее получены С. Л. Соболевым [1,2].

2. Неравенство (3) используется следующим образом. В области Ω, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, рассмотрим полное пространство W_2^k функций, имеющих суммируемые с квадратом обобщенные производные [3] до порядка k включительно, определив квадрат нормы $\|u\|$ как интеграл по $(\Omega, [0, t_0])$ от суммы квадратов всех производных $u(y, t)$ до порядка k включительно. Тогда из неравенства (3) следует

$$\|u\| \leqslant C(t_0) M \tag{5}$$

и, следовательно, последовательность $\{u_\nu(y, t)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ будет фундаментальной в W_2^k, если последовательности $\{f_\nu\}$, $\{\psi_\nu\}$, $\{(u_0)_\nu\}$ $\{(u_1)_\nu\}$ суть фундаментальные в смысле норм

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \sqrt{F_k(t)}; \quad \|\psi\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \sqrt{\Psi_{k+1}(t)};$$
$$\|u_0\| = \sqrt{U_0^k}; \quad \|u_1\| = \sqrt{U_1^{k-1}}. \tag{6}$$

Это позволяет строить решения предельной задачи (1) предельным переходом от достаточно гладких решений.

3. Наметим доказательство (3). Обозначим $I_{r,\alpha} + I_{r-1,\alpha+1} = J_{r,\alpha}$, $J_{k,0}(t) = J_k(t)$. Очевидно, достаточно доказать (3) для $J_k(t)$, так как $I_{r,\alpha}$ есть J_r для $\partial^\alpha u / \partial t^\alpha$. Положим

$$\Phi_k(u) = \int_S \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{m!\,(k-1-m)!} \times$$
$$\times \sum_{i_1, \ldots, i_{k-1-m}=1}^{n-1} \frac{\partial^k u}{\partial t\, \partial x_n^m \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1-m}}} \frac{\partial^k u}{\partial x_n^{m+1} \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{k-1-m}}}\, dS,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — местные координаты.

В дальнейшем будут встречаться лишь конечные суммы, и мы будем опускать индексы суммирования, записывая под знаком суммы лишь вид слагаемых.

Вычисляя dJ_k / dt, пользуясь (1), преобразуя интеграл по Ω в интеграл по S и вводя местные координаты, получим

$$\frac{dJ_k}{dt} = 2\Phi_k(u) - 2\sum \int_\Omega D_{k-1} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot D_{k-1} f \, d\Omega, \tag{7}$$

где $D_l \varphi$ означает производную порядка l от φ.

Мы доказываем, что

$$\Phi_k(u) - \Phi_{k-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt} \sum_{j \geqslant 1} \int_S A(y_1, \ldots, y_n) D_{k-1} u \cdot D_{k-j} u \, dS +$$
$$+ \frac{d}{dt} \sum \int_S D_{k-1} u \cdot D_k \psi \, dS + \frac{d}{dt} \sum \int_S D_{k-1} u \cdot D_{k-2} f \, dS +$$
$$+ \sum \int_S D_{k-1} \frac{\partial y}{\partial t} \cdot D_{k-2} f \, dS, \tag{8}$$

где $A(y_1, \ldots, y_n)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, зависящие лишь от выбора поверхности S. Так как

$$\Phi_k(u) = \sum_{j=2}^{k} \left[\Phi_j \left(\frac{\partial^{k-j} u}{\partial t^{k-j}} \right) - \Phi_{j-1} \left(\frac{\partial^{k-j+1} u}{\partial t^{k-j+1}} \right) \right] + \Phi_1 \left(\frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}} \right),$$

то, интегрируя (7) по t от 0 до t_0 и используя (8), получим

$$J_k(t_0) = J_k(0) + 2 \sum_{j \geqslant 1} \left[\int_S A D_{k-1} u \cdot D_{k-j} u \, dS \right]_0^{t_0} + \sum \left[\int_S D_{k-1} u \cdot D_k \psi \, dS \right]_0^{t_0} +$$

$$+ \sum \left[\int_S D_{k-1} u \cdot D_{k-2} f \, dS \right]_0^{t_0} - 2 \int_0^{t_0} \left[\int_S D_1 \frac{\partial^{k-2} u}{\partial t^{k-2}} D_{k+1} \psi \, dS + \right.$$

$$\left. + \sum \int_S D_{k-2} u \cdot D_{k-1} f \, dS + \sum \int_\Omega D_{k-1} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot D_{k-1} f \, d\Omega \right] dt. \quad (9)$$

Если $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ — непрерывно дифференцируемая в $\bar{\Omega}$ функция, то

$$\int_S \varphi \, dS = \int_S \sum_{i=1}^{n} \cos(\mathbf{n}\, y_i) \cdot (\varphi a_i) \, dS = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} (\varphi a_i) \, d\Omega =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i D_1 \varphi \, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \varphi D_1 a_i \, d\Omega,$$

где $a_i(y_1, \ldots, y_n)$ — какая-либо непрерывно дифференцируемая функция такая, что $a_i|_S = \cos(\mathbf{n}\, y_i)$.

Поэтому, используя неравенство Буняковского, а также очевидное неравенство

$$|ab| \leqslant \frac{a^2}{2M^2} + \frac{M^2}{2} b^2,$$

получим оценки, подобные следующей:

$$\left| \int_S A(y_i) D_{k-1} u \cdot D_{k-j} u \, dS \right| \leqslant \frac{N}{M^2} J_k(t) + N_1(M^2) J_{k-j}(t),$$

где N и $N_1(M^2)$ — постоянные, не зависящие от выбора $u(y_1, \ldots, y_n, t)$. Выберем M^2 настолько большим, чтобы коэффициент при $J_k(t_0)$ после оценки правой части (9) не превосходил $1/2$. Кроме того, учтем, что $J_k(0)$, $J_{k-1,1}(0), \ldots, J_{1,k-1}(0)$ оцениваются через U_0^k, U_1^{k-1}, $F_{k-2}(0)$. Тогда (9) приводит к неравенству, по которому $J_k(t_0)$ не превосходит некоторого линейного выражения от U_0^k, U_1^{k-1}, $F_k(t)$, $\Psi_{k+1}(t)$, $J_{r,\alpha}(t)$ и их интегралов по t, причем $1 \leqslant r < k$ и $r + \alpha \leqslant k$. Неравенство (3) доказывается непосредственно для $k = 1$ и затем последовательно для $J_{2,0}$, $J_{2,1}, \ldots, J_{3,0}$, $J_{3,1}, \ldots, J_k$. Если $f \equiv 0$, $\psi \equiv 0$, то аналогично доказывается (4).

4. Для доказательства (8) используем следующее легко доказываемое геометрическое утверждение.

Пусть каждой точке M поверхности S отвечает вектор $\mathbf{P}$, лежащий в плоскости Q, касательной к S в точке M. Спроектируем на Q векторы $\mathbf{P}$ некоторой окрестности точки M и дивергенцию в точке M образовавшегося в Q векторного поля обозначим $\operatorname{div}_S \mathbf{P}$. Тогда

$$\int_S \operatorname{div}_S \mathbf{P}\, dS = 0. \tag{10}$$

Пусть $x_n = \omega(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — уравнение поверхности S в окрестности точки M и φ и χ — две $(p+1)$ и $(q+1)$ раз непрерывно дифференцируемые функции в $\overline{\Omega}$.

Обозначим

$$Z_{\nu}^{\alpha, \beta}(\varphi, \chi) = \sum_{i_1, \ldots, i_\nu = 1}^{n-1} \frac{\partial^p \varphi}{\partial x_n^{\alpha} \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_\nu} \partial x_l} \, \frac{\partial^q \chi}{\partial x_n^{\beta} \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_\nu}}.$$

Выражения, полученные из $Z_{\nu}^{\alpha, \beta}(\varphi, \chi)$ заменой ∂x_n^{α} на $\partial x_n^{\alpha-1} \partial x_i$, обозначим через ${}^{\alpha}Z_{\nu}^{,\beta}(\varphi, \chi)$; заменой ∂x_n^{β} на $\partial x_n^{\beta-1} \partial x_j$ через ${}^{\beta}Z_{\nu}^{\alpha,}(\varphi, \chi)$; заменой ∂x_{i_ν} у φ на ∂x_n, а у χ на ∂x_j — через $Z^{\alpha, \beta}(\underset{\nu}{\varphi}, \chi)$ и, соответственно, при замене ∂x_{i_ν} на ∂x_n у χ и ∂x_{i_ν} на ∂x_j у φ — через $Z^{\alpha, \beta}(\varphi, \underset{\nu}{\chi})$; заменой ∂x_l на ∂x_n — через $Z^{\alpha, \beta, \nu}(\varphi, \chi)$. Тогда на основании (10) получаем

$$\int_S \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} Z_{\nu}^{\alpha, \beta}(\varphi, \chi)\, dS = \int_S \sum_{i, j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} [\alpha\, {}^{\alpha}Z_{\nu}^{,\beta}(\varphi, \chi) + \beta\, {}^{\beta}Z_{\nu}^{,\beta}(\varphi, \chi) -$$

$$- \nu (Z^{\alpha, \beta}(\underset{\nu}{\varphi}, \chi) + Z^{\alpha, \beta}(\varphi, \underset{\nu}{\chi}))]\, dS - \int_S Z^{\alpha, \beta, \nu}(\varphi, \chi) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i^2} \right) dS. \tag{11}$$

Преобразуя подинтегральное выражение в интеграле $\Phi_k(u) - \Phi_{k-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, выделяем сумму

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} C_{k-2}^{2s} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} Z_{k-2-2s}^{2s, 2s+1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) - \sum_{r=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]-1} C_{k-2}^{2r+1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} Z_{k-3-2r}^{2r+1, 2r+2}\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

интеграл которой по S, на основании (11), приводится к полной производной по t от интегралов требуемого вида. Более простым путем приходим к тому же заключению об остальных слагаемых подинтегрального выражения.

Поступило
18 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, ДАН, 48, №№ 8 и 9 (1945). [2] С. Л. Соболев, Матем. сборн., 11 (53), 3 (1942). [3] С. Л. Соболев, там же, 4 (46), 3 (1938).