Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Г. П. САФРОНОВА

О МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ, СВЯЗАННОМ С СИНГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ДЖЕКСОНА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 V 1950)

Д. Джексон [1] для оценки приближения непрерывной функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами ввел в рассмотрение интеграл

$$J_n(x) = \frac{3}{2n\pi(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^4 dt. \qquad (1)$$

Если заметить, что

$$\left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 = L^{(n)} + \sum_{k=1}^{2n-2} l_k^{(n)} \cos kt \qquad (2)$$

и подставить (2) в (1), то мы получим, что

$$J_n(x) = \rho_0^{(n)} A + \sum_{k=1}^{2n-2} \rho_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где $\rho_k^{(n)}$ — некоторые постоянные, а A, a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Таким образом, можно сказать, что для построения интеграла Джексона (1) функции $f(x)$ нужно образовать ряд Фурье этой функции и применить к нему метод суммирования с помощью множителей $\rho_k^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-2)$. Этот метод мы будем называть методом (J).

В настоящей заметке устанавливается следующая теорема:

Теорема. 1) *Метод (J) не слабее метода $(C, 3)$.* 2) *В этой формулировке нельзя заменить $(C, 3)$ на $(C, 4)$.* 3) *Не существует нормального метода суммирования, который был бы не слабее метода (J).*

При этом, следуя С. Мазуру [2], мы называем метод суммирования рядов с помощью множителей $\{\lambda_k^{(n)}\}$ „нормальным", если $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k > n$ и $\lambda_n^{(n)} \neq 0$.

Для доказательства нашей теоремы нам потребуются точные значения чисел $\rho_k^{(n)}$.

Легко видеть, что

$$\rho_0^{(n)} = \frac{3}{n(2n^2+1)} L^{(n)}, \qquad \rho_k^{(n)} = \frac{3}{2n(2n^2+1)} l_k^{(n)} \quad (1 \leqslant k \leqslant 2n-2),$$

где

$$L^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 dt, \quad l_k^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 \cos kt\, dt.$$

Вычисляя интегралы, мы приходим к формулам:

$$\rho_k^{(n)} = \frac{1}{2n(2n^2+1)} \left[\frac{(2n-k+1)!}{(2n-k-2)!} - 4\,\frac{(n-k+1)!}{(n-k-2)!}\right], \quad 0 \leqslant k \leqslant n-2;$$

$$\rho_k^{(n)} = \frac{1}{2n(2n^2+1)}\,\frac{(2n-k+1)!}{(2n-k-2)!}, \qquad n-2 < k \leqslant 2n-2. \tag{3}$$

Чтобы доказать утверждения 1) и 2), нам потребуется известная [3] теорема А. Гурвица:

Для того чтобы метод множителей $\lambda_k^{(n)}$ был не слабее метода (C, m), необходимо и достаточно, чтобы было $\lim \lambda_k^{(n)} = 1$ *и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^m \mid \Delta^{m+1} \mid \lambda_k^{(n)} \mid < C. \tag{4}$$

Исходя из формулы (3) и полагая $\rho_k^{(n)} = 0$ для $k > 2n-2$, нетрудно показать, что

$$\Delta^4 \rho_k^{(n)} = \frac{-12}{n(2n^2+1)}, \qquad k = n-2;$$

$$\Delta^4 \rho_k^{(n)} = \frac{3}{n(2n^2-1)}, \qquad k = 2n-2;$$

$$\Delta^4 \rho_k^{(n)} = 0 \qquad \text{при прочих } k.$$

Поэтому для $\lambda_k^{(n)} = \rho_k^{(n)}$ выполнено условие (4) при $m = 3$. Кроме того, очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_k^{(n)} = 1$. Если же $m = 4$, то таким же образом легко проверяется, что (4) не выполнено.

Утверждение 3) вытекает из следующих соображений: выбрав по произволу числа $a_1, a_3, a_5, \ldots$ и положив

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \rho_k^{(n)} a_k = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

мы сможем удовлетворить этой системе уравнений за счет выбора $a_0, a_2, a_4, \ldots$ Этим мы приходим к ряду $\sum a_n$, который суммируется методом (J) к нулю. Заметив это, рассмотрим какой-нибудь нормальный метод, порождаемый множителями $\{\lambda_k^{(n)}\}$. Положив

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} a_n = L_n,$$

мы видим, что за счет выбора чисел $a_1, a_3, a_5, \ldots$ можно придать числам L_{2n-1} любые значения. Поэтому метод $\{\lambda_k^{(n)}\}$ не может суммировать все ряды, суммирующиеся методом (J).

Теорема доказана полностью.

Замечание. В реферате работы Джексона, принадлежащей Г. Вейлю [4], утверждается, что основным методом, применяемым в работе Джексона, является метод $(C, 4)$. Из нашей теоремы явствует неточность этого утверждения Вейля.

Поступило
18 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Jackson, Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen, Dissertation, Göttingen, 1911. [2] S. Mazur, Studia Math., 2, 40 (1930). [3] Ch. N. Moore, Am. Math. Soc. Colloquium Publ., 22, 45 (1938). [4] Jahrb. über die Fortschritte der Math., 42, 434 (1911).