Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 2

*МАТЕМАТИКА*

И. П. НАТАНСОН

# О ТОЧНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

*(Представлено академиком В. И. Смирновым 20 V 1950)*

В этой заметке рассматривается вопрос о приближенном представлении непрерывной и $2\pi$-периодической функции $f(x)$ интегралом

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\Phi_n(t-x)\,dt, \tag{1}$$

где функция $\Phi_n(t)$ предполагается: а) положительной, б) четной, в) $2\pi$-периодической и такой, что г) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1$, д) $\delta_n = \int_0^{\pi} t\,\Phi_n(t)\,dt \to 0$.

Всем этим условиям удовлетворяют многие классические сингулярные интегралы, например, Валле-Пуссена, Фейера, Джексона, Пуассона.

Теорема 1. *Если $f(x)$ непрерывная и $2\pi$-периодическая функция с модулем непрерывности $\omega(\delta)$, то*

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant 3\omega(\delta_n). \tag{2}$$

Доказательство. Формулу (1) можно преобразовать к виду

$$f_n(x) = \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)]\,\Phi_n(t)\,dt. \tag{3}$$

Отсюда и из г) следует, что

$$f_n(x) - f(x) = \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]\,\Phi_n(t)\,dt.$$

Очевидно, $|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leqslant 2\omega(t)$. Как известно, модуль непрерывности удовлетворяет неравенству $\omega(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)\,\omega(\delta)$. Поэтому $\omega(t) \leqslant \left(\frac{t}{\delta_n} + 1\right)\omega(\delta_n)$ и

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\omega(\delta_n)\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\delta_n} + 1\right)\Phi_n(t)\,dt = 3\omega(\delta_n).$$

Теорема доказана. В частности, из нее следует, что при условиях а) — д) интеграл (1) равномерно стремится к $f(x)$. Заметим, что порядок оценки (2) улучшить нельзя. Например, для $2\pi$-периодической функции $f(x)$, совпадающей на $[-\pi, \pi]$ с $|x|$, будет $f_n(0) = 2\omega(\delta_n)$.

Приведем пример применения теоремы 1.

Теорема 2. *Если $f(x)$ непрерывна и $2\pi$-периодична, а*

$$F_n(x) = \frac{1}{3n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{\sin n \frac{t-x}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} \right)^2 dt$$

*есть ее интеграл Фейера, то*

$$|F_n(x) - f(x)| \leqslant 3\omega\left(\pi \frac{1 + 2\ln n}{4n}\right). \tag{4}$$

Доказательство. В нашем случае

$$\delta_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} t \left( \frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt.$$

Разобьем этот интеграл на два, распространенные на промежутки $\left[0, \frac{\pi}{2\pi}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\right]$. Применяя к первому оценку $|\sin nt| \leqslant n |\sin t|$, а ко второму оценки $|\sin nt| \leqslant 1$ и $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$, находим

$$\delta_n \leqslant \frac{2}{n\pi} \left[ n^2 \int_0^{\pi/2n} t\, dt + \frac{\pi^2}{4} \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{dt}{t} \right] = \frac{\pi}{4n}(1 + 2\ln n),$$

чем и доказано (4).

Если ядро интеграла (1) не положительно, но удовлетворяет условиям б), в), г) и, кроме того, таково, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_n(t)|\, dt < k, \quad \delta_n' = \int_0^{\pi} t\, |\Phi_n(t)|\, dt \to 0,$$

то, рассуждая так же, как в теореме 1, можно получить оценку

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant (k+2)\, \omega(\delta_n'). \tag{5}$$

Однако порядок оценки (5) уже не будет окончательным. Например, для интеграла Бернштейна — Рогозинского

$$B_n(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \frac{2n+1}{2} (t-x) \left[ \frac{1}{\sin\left(\frac{t-x}{2} + \frac{\pi}{4n+2}\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sin\left(\frac{t-x}{2} - \frac{\pi}{4n+2}\right)} \right] dt$$

неравенство (5) дает лишь, что

$$|B_n(x) - f(x)| < c\omega\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

в то время как на самом деле

$$| B_n(x) - f(x) | < c\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Возвращаясь к случаю положительного ядра, заметим, что на $[0, \pi]$ будет $t^2 \leqslant \pi t$ и потому из а) и д) вытекает, что

$$\Delta_n = \int_0^\pi t^2 \Phi_n(t)\, dt \to 0. \tag{6}$$

Допустим теперь, что ядро $\Phi_n(t)$ удовлетворяет условиям а) — д) и, кроме того, таково, что при любом $\sigma$ $(0 < \sigma < \pi)$ оказывается

$$\int_\sigma^\pi \Phi_n(t)\, dt = o(\Delta_n). \tag{7}$$

При этих условиях справедлива

Теорема 3. *Если $f(t)$ непрерывна, $2\pi$-периодична и в точке $x$ существует конечная $f''(x)$, то*

$$f_n(x) = f(x) + f''(x)\Delta_n + o(\Delta_n). \tag{8}$$

Доказательство. Из существования $f''(x)$ вытекает, что

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \left[\frac{f''(x)}{2} + \alpha(t)\right] t^2,$$

где $\alpha(t)$ — ограниченная (вместе с $f(t)$) функция, стремящаяся к нулю одновременно с $t$. Исходя отсюда, легко преобразовать (3) к виду

$$f_n(x) = \int_0^\pi [2f(x) + f''(x)t^2 + \beta(t)t^2]\, \Phi_n(t)\, dt,$$

где $\beta(t)$ — ограниченная функция, стремящаяся к нулю вместе с $t$. В силу а) и (6) имеем

$$f_n(x) = f(x) + f''(x)\Delta_n + \int_0^\pi \beta(t)\, t^2 \Phi_n(t)\, dt.$$

Но, опираясь на (7), легко показать, что последний интеграл есть $o(\Delta_n)$ чем и завершено доказательство.

Заметим, что условие (7) существенно для справедливости асимптотической формулы (8). Для интеграла Фейера $F_n(x)$ условие (7) не выполнено и формула (8) не имеет места.

Примером применения теоремы 3 служит

Теорема 4. *Если $f(t)$ непрерывна, $2\pi$-периодична и при $t = x$ существует конечная $f''(x)$, то для интеграла Джексона*

$$J_n(x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{\sin n \dfrac{t-x}{2}}{\sin \dfrac{t-x}{2}} \right)^4 dt$$

*справедлива формула*

$$J_n(x) = f(x) + \frac{3}{2n^2} f''(x) + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{9}$$

Доказательство. В нашем случае

$$\Delta_n = \frac{12}{\pi n(2n^2+1)} \int\limits_0^{\pi/2} t^2 \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt = \frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{10}$$

В то же время при $0 < \sigma < \pi$ будет

$$\frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int\limits_\sigma^\pi \left(\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}\right)^4 dt = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Значит, условие (7) выполнено и теорема 3 применима. Остается сослаться на (10), чтобы получить (9).

Рассмотрим в заключение класс $A_\alpha$ всех $2\pi$-периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, и положим

$$u_n(\alpha) = \sup_{f \in A_\alpha} \left\{\max_x |f_n(x) - f(x)|\right\}.$$

На основании (3) легко получается

Теорема 5. *Если выполнены условия* а) — д), *то*

$$u_n(\alpha) = 2\int\limits_0^\pi t^\alpha \Phi_n(t)\, dt. \tag{11}$$

Для интеграла Джексона $J_n(x)$ формула (11) принимает вид

$$u_n(\alpha) = \frac{3 \cdot 2^\alpha}{\pi n^\alpha} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 z}{z^{4-\alpha}} dz + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Поступило
6 V 1950