Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 5

МАТЕМАТИКА

Г. Я. АРЕШКИН

О СХОДИМОСТИ КРИВЫХ ПО ДЛИНЕ И О КРИВОЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ ЛЕБЕГА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 IV 1950)

1. Условимся обозначать через K тело множеств, содержащее максимальное множество E; через K^* — замкнутое тело множеств. Условимся также считать все встречающиеся в дальнейшем функции множества конечными.

Введем следующие определения*:

I. Функции множества семейства $\{\Phi_\alpha(H)\}$, определенные на системе множеств $\mathscr{H}$, назовем равностепенно непрерывными на $\mathscr{H}$, если для каждой невозрастающей сходящейся к нулю последовательности множеств $\{H_n\}$ этой системы

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_\alpha(H_n) = 0 \tag{1}$$

равномерно относительно α.

II. Функции множества семейства $\{\Phi_\alpha(H)\}$ назовем сильно равностепенно непрерывными на $\mathscr{H}$, если равенство (1) справедливо равномерно относительно α для всякой сходящейся к нулю последовательности множеств $\{H_n\}$ этой системы.

Теорема 1. *Для семейства $\{\Phi_\alpha(H)\}$ вполне аддитивных функций множества, определенных на теле K^*, условия равностепенной и сильной равностепенной непрерывности эквивалентны.*

Вместе с функциями семейства $\{\Phi_\alpha(H)\}$ сильно равностепенно непрерывны и все три их вариации: положительные, отрицательные и полные.

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность $\{\Phi_n(H)\}$ $n=1, 2, \ldots$, вполне аддитивных функций множества, заданных на теле K и продолжимых на тело K^*, сходилась на K^* к некоторой функции $\Phi(H)$, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась на системе множеств $K_{\delta\sigma}$.*

Теорема 3. *Пусть последовательность $\{\Phi_n(H)\}$, $n=1, 2, \ldots$ вполне аддитивных функций множества, заданных на теле K и продолжимых на тело K^*, сходится на теле K. Тогда для сходимости этой последовательности и на теле K^* необходима и достаточна равностепенная непрерывность функций $\{\Phi_k(H)\}$ на системе множеств $K_{\delta\sigma}$.*

Теорема 4. *Пусть на счетном теле K задано семейство вполне аддитивных функций множества $\{\Phi_\alpha(H)\}$, продолжимых на тело K^*.*

---

* Ср. ([5]) и ([6]).

Тогда для компактности семейства $\{\Phi_\alpha(H)\}$ на теле K^* необходимо и достаточно выполнение следующих условий:* 1) *функции семейства $\{\Phi_\alpha(H)\}$ равномерно ограничены (на теле K);* 2) *функции семейства $\{\Phi_\alpha(H)\}$ равностепенно непрерывны на системе множеств $K_{\delta\sigma}$.*

2. Обозначим через C_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, непрерывную спрямляемую жорданову кривую, заданную в трехмерном евклидовом пространстве уравнениями

$$x^i = \varphi_k^i(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Кратные точки кривой C_k будем считать различными. $1:1$ отображение сегмента $I=[a, b]$ на кривую C_k, порожденное уравнениями (2), обозначим через

$$q^k = \varphi_k(t). \tag{3}$$

Обозначим, далее, через $P(\varphi_k^i, T)$, $N(\varphi_k^i, T)$ и $V(\varphi_k^i, T)$ $(V=P-N)$ положительную, отрицательную и полную вариации функции $\varphi_k^i(T)$ на линейных множествах $T \subseteq I$; через $K_k^*(T)$ — замкнутое тело множеств, на котором определены эти вариации (для функций $\varphi_k^i(t)$, $i=1, 2, 3$); через $K_\omega^*(T)$ — пересечение всех тел $K_k^*(T)$, $k=0, 1, 2, \ldots$; образы тел $K_k^*(T)$ и $K_\omega^*(T)$ при отображении (3) обозначим, соответственно, через $K_k^*(Q^k)$ и $K_\omega^*(Q^k)$. Отображение (3) порождает $1:1$ отображение кривых C_k друг на друга по формуле $q^k = \varphi_k[\varphi_l^{-1}(q^l)]$, при котором тела $K_\omega^*(Q^k)$ и $K_\omega^*(Q^l)$ подобно (с сохранением операций сложения, пересечения и вычитания множеств) отображаются друг на друга.

Пусть $x^i = \psi_k^i(s)$, $i=1, 2, 3$, $0 \leqslant s \leqslant L_k$, есть задание кривой C_k с помощью длины дуги s. Тогда функция $t = \varphi_k^{-1}[\psi_k(s)] \equiv t(s)$ будет давать $1:1$ отображение сегмента $[0, L_k]$ на сегмент I. При этом отображении тела $K_k^*(T)$ и $K_k^{**}(S)$, где $K_k^{**}(S)$ есть тело измеримых по Лебегу множеств сегмента $[0, L_k]$, подобно отображаются друг на друга. Кроме того, если $T = t(S)$, $S \in K_k^{**}(S)$, то

$$P(\varphi_k^i, T) = P(\psi_k^i, S), \quad N(\varphi_k^i, T) = N(\psi_k^i, S),$$

$$V(\varphi_k^i, T) = V(\psi_k^i, S), \quad \Phi(\varphi_k^i, T) = \Phi(\psi_k^i, S),$$

где $\Phi = P + N$.

Меру Лебега $L_k(S)$ множеств $S \in K_k^{**}(S)$ будем называть функцией длины кривой C_k. Функцию $L_k(S)$ с помощью отображений $q^k = \psi_k(S)$ и $t = t(S)$ можно перенести на тела $K_k^*(Q^k)$ и $K_k^*(T)$. Эти функции будем обозначать через $L_k(Q^k)$, $L_k(T)$ и сохраним за ними название функции длины кривой C_k.

3. В дальнейшем мы предполагаем, что $\varphi_k^i(t) \to \varphi_0^i(t)$ равномерно относительно $t \in I$, $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим следующие определения:

I. Кривые C_k сходятся к кривой C_0 по длине ([1-4]), $C_k \to C_0(L)$, если $L_k \to L_0$.

II. Кривые C_k сходятся к кривой C_0 по вариациям ([1-4]), $C_k \to C_0(V)$, если $V(\varphi_k^i, I) \to V(\varphi_0^i, I)$, $i = 1, 2, 3$.

* Ср. ([5]) и ([6]).

III. Кривые C_k сходятся к кривой C_0 по длине относительно тела множеств $K \subseteq K_\omega^*$, $C_k \to C_0(L, K)$, если для любого множества $T \in K$ $L_k(T) \to L_0(T)$.

IV. Кривые C_k сходятся к кривой C_0 по вариациям относительно тела множеств $K \subseteq K_\omega^*$, $C_k \to C_0(V, K)$, если для любого множества $T \subseteq K$ $V(\varphi_k^i, T) \to V(\varphi_0^i, T)$, $i = 1, 2, 3$.

Аналогично определениям II и IV можно определить сходимости по положительным и отрицательным вариациям: II_P, II_N и т. д.

4. Известно, что $\mathrm{I} \to \mathrm{II}$, но, вообще говоря, $\mathrm{II} \not\to \mathrm{I}$; кроме того, ясно, что $\mathrm{III} \to \mathrm{I}$ и $\mathrm{IV} \to \mathrm{II}$. Следующий пример показывает, что, вообще говоря, $\mathrm{I} \not\to \mathrm{III}$.

Пусть η — произвольное число, $0 < \eta < {}^1/_2$. Пусть, далее,

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n, \quad \eta_n > 0,$$

$$\eta_1 > \eta_2 = \eta_3 > \eta_4 = \ldots = \eta_7 > \eta_8 = \ldots = \eta_{15} > \ldots$$

На сегменте $J = [0, 1]$ выберем интервалы $\{\delta_k^0\}$, $k = 1, 2, \ldots$, длины η_k следующим образом: интервал $\delta_1^0 = (a_1, b_1)$ лежит на сегменте J на равном расстоянии от его концов; интервалы δ_2^0 и δ_3^0 лежат, соответственно, на сегментах $[0, a_1]$ и $[b_1, 1]$ на равном расстоянии от их концов, и т. д.

Зафиксируем число n. Обозначим через N_n число интервалов δ_k^0, $1 \leqslant k < 2^n$. Тогда число сегментов Δ^n, дополняющих эти интервалы до сегмента J, будет равно $N_n + 1$.

Пусть $\{\delta_k^n\}$, $k = 1, 2, \ldots$, есть последовательность интервалов, удовлетворяющих условиям: 1) интервалы $\{\delta_k^n\}$ расположены на сегменте J подобно интервалам $\{\delta_k^0\}$; 2) при $1 \leqslant k < 2^n$ $\delta_k^n = \delta_k^0$; 3) сумма длин интервалов δ_k^n, приходящихся на каждый сегмент Δ^n, равна $\eta / N_n + 1$. Подобная конструкция может быть выполнена.

Интервалы $\{\delta_k^n\}$ при фиксированном n позволяют установить подобное отображение сегмента J на самого себя так, что при этом подобии интервалы δ_k^n и δ_k^0 линейно отображаются друг на друга. Обозначим это отображение через $x_n^1 = \varphi_n^1(t)$, $t \in J$, $n = 1, 2, \ldots$, и положим, кроме того, $x_n^2 = 1/n$, $x_0^1 = t$, $x_0^2 = 0$. Мы получим параметрическое представление плоских кривых C_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Легко видеть, что $C_n \to C_0(L)$. Однако на множестве T, состоящем из интервалов δ_k^0, $k = 1, 2, \ldots$, $L_n(T) = \eta + S_n \to 2\eta$, $S_n = \sum_{k=1}^{2^n - 1} \eta_k$, тогда как $L_0(T) = \eta$.

Теорема 5. *Для замкнутого тела множеств* K^*, $\mathfrak{B} \subseteq K^* \subseteq K_\omega^*$,

$$\mathrm{IV} \to (\mathrm{IV}_P, \mathrm{IV}_N) \to \mathrm{IV}^*.$$

Теорема 6. *Для сходимости* $C_k \to C_0(L, K^*)$, $\mathfrak{B} \subseteq K^* \leqslant K_\omega^*$, *необходимо и достаточно, чтобы:* 1) $C_k \to C_0(L)$; 2) *функции* $L_k(T)$, $k = 1, 2, \ldots$, *были равностепенно непрерывны на классе* $K_{\delta\sigma}^0$, где K^0 *обозначает тело множеств, являющихся суммами конечного числа интервалов сегмента* I, *понимаемых в широком смысле.*

Аналогичные предложения справедливы относительно сходимостей по положительным, отрицательным и полным вариациям.

---

* Через $\mathfrak{B}$ мы обозначаем тело B-измеримых множеств сегмента I.

5. Пусть на кривой C, заданной уравнениями $x^i = \varphi^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $i = 1, 2, 3$, определена функция точки $f(q)$, измеримая $K^*(Q)$. Под криволинейным интегралом Лебега 1-го типа от функции $f(q)$ по множеству $Q \in K^*(Q)$ кривой C $\int\limits_Q f(q)\,ds$ понимается интеграл Лебега — Стильтьеса $\int\limits_Q f(q)\,L(dQ)$, где $L(Q)$ есть функция длины кривой C. Под криволинейным интегралом Лебега 2-го типа от функции $f(q)$ по множеству $Q \in K^*(Q)$ кривой C относительно переменной x^i $\int\limits_Q f(q)\,dx^i$ понимается интеграл Лебега — Стильтьеса $\int\limits_Q f(q)\,\Phi^i(dQ)$, где $\Phi^i(Q) = \Phi(\varphi^i, Q)$.

Легко видеть, что если существует криволинейный интеграл Лебега 1-го типа от функции $f(q)$ при кривой C, то существуют и все криволинейные интегралы Лебега 2-го типа от функции $f(q)$ по кривой C и наоборот.

Теорема 7. *Пусть $C_k \to C_0(L, K_\omega^*)$. Пусть, далее, функции точки f_k, заданные соответственно на кривых C_k, $k = 1, 2, \ldots$, измеримы $K_\omega^*(Q^k)$, имеют криволинейные интегралы Лебега 1-го типа соответственно по кривым C_k и почти всюду относительно L_0 сходятся к конечной функции f_0, заданной на кривой C_0. Тогда, если интегралы $\int\limits_{Q^k} f_k\,ds$, $k = 1, 2, \ldots$, равностепенно абсолютно непрерывны (т. е., если для любого числа $\eta > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что как только для некоторого множества $Q^k \in K_\omega^*(Q^k)$, $L_k(Q^k) < \delta$, так модуль указанного интеграла меньше η), то функция f_0 $K_\omega^*(Q^0)$-измерима, обладает криволинейными интегралами Лебега 1-го и 2-го типов и для любой сходящейся последовательности множеств $\{T_k\}$ $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = T_0$, $T_k \in K_\omega^*(T)$, справедливы соотношения:*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\varphi_k(T_k)} f_k\,ds = \int\limits_{\varphi_0(T_0)} f_0\,ds, \tag{4}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\varphi_k(T_k)} f_k\,dx^i = \int\limits_{\varphi_0(T_0)} f_0\,dx^i, \tag{5}$$

где $\varphi_k(T_k)$ есть образ множества T_k при отображении (3).

В случае, когда все функции $\varphi_k^i(t)$ абсолютно непрерывны, формулы (4) и (5) справедливы, в частности, для всякого измеримого по Лебегу множества T сегмента I.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз. ССР

Поступило
13 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. R. Adams and J. A. Clarkson, Bull. Am. Math. Soc., **40**, 413 (1934). [2] C. R. Adams and H. Levi, Duke Math. Journ., **1**, 19 (1935). [3] T. Radó and P. Reichelderfer, Duke Math. Journ., **9**, 527 (1942). [4] M. C. Ayer and T. Radó, Bull. Am. Math. Soc., **54**, 533 (1948). [5] В. М. Дубровский, Матем. сборн., **20** (62), № 2, 317 (1947). [6] Г. Я. Арешкин, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, **14**, 173 (1946).