Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА — ДЕЛЬЗАРТА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 V 1950)

1. Дельзарт [1] предложил обобщение формулы Тейлора, связанное с дифференциальным оператором

$$Ly = \frac{d^2y}{dx^2} - q(x)\,y \quad (x \geqslant 0), \tag{1}$$

где $q(x)$ — непрерывная в каждом конечном промежутке функция.

Рассуждения Дельзарта в основном сводятся к следующему. Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение дифференциального уравнения

$$Ly = \lambda y, \tag{2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0. \tag{3}$$

Пусть $\varphi(x, \lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x)$. Подставляя это разложение в уравнение (2), мы получим

$$L\varphi_k = \varphi_{k-1} \ (k \geqslant 1), \qquad L\varphi_0 = 0. \tag{4}$$

Из начальных условий (3) следует:

$$\varphi_0(0) = 1, \quad \varphi_k(0) = 0 \ (k \geqslant 1), \quad \varphi_k'(0) = 0 \ (k \geqslant 0). \tag{5}$$

Предположим, что функция $f(x)$ $(x \geqslant 0)$ имеет непрерывную вторую производную. Обозначим через $T_x^y f(x)$ $(x \geqslant y)$ решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)\,u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - q(y)\,u, \tag{6}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{y=0} = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0.$$

С помощью функции Римана $T_x^y f(x)$ можно записать в виде [2]

$$T_x^y f(x) = \frac{1}{2}\{f(x+y) + f(x-y)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} w(x, y, t)\, f(t)\, dt.$$

Допустим, что для всех k от 1 до $(n+1)$ существуют операторы $L^k f(x)$. Положим

$$R_n(x, y; f) = T_x^y f(x) - \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(y) L^k f(x).$$

Легко видеть, что R_n удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$R_n \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial R_n}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0. \tag{7}$$

Применяя к R_n вначале оператор L_x, затем оператор L_y и вычитая, мы получим, пользуясь (4),

$$L_x R_n - L_y R_n = -\varphi_n(y) L^{(n+1)} f(x).$$

Решение этого уравнения при начальных условиях (7) пишется виде ([2])

$$R_n(x, y; f) = \iint\limits_{\triangle} \varphi_n(\eta) L^{(n+1)} f(\xi) v(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где $v(x, y; \xi, \eta)$ — функция Римана для уравнения (5) и $\triangle$ — треугольник с вершинами в точках $(x-y, 0)$, (x, y), $(x+y, 0)$.

2. Предположим, что $\varphi_n(\eta)$ и $u(x, y; \xi, \eta)$ в треугольнике $\triangle$ неотри цательны. В этом случае можно применить теорему о среднем значении, и мы получим

$$R_n(x, y; f) = L^{(n+1)} f(\zeta) \iint\limits_{\triangle} \varphi_n(\eta) v(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где $\zeta = x + \theta y$, причем $|\theta| < 1$. Легко видеть, что второй множитель справа есть решение уравнения

$$L_x u - L_y u = -\varphi_n(y), \tag{8}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0. \tag{9}$$

В силу (4) уравнение (8) имеет очевидное решение $\varphi_{n+1}(y)$. Поэтому

$$R_n(x, y; f) = \varphi_{n+1}(y) L^{(n+1)} f(\zeta)\,|_{\zeta = x+\theta y}. \tag{10}$$

3. Укажем теперь простой признак для неотрицательности функций $\varphi_n(y)$ и $v(x, y; \xi, \eta)$.

Теорема. *Если функция $q(x)$ неотрицательна и монотонно убывает, то $\varphi_n(x) > 0$ $(n \geqslant 0)$ и в треугольнике $\triangle$ $v(x, y; \xi, \eta) \geqslant 0$. Поэтому для $y \leqslant x$ имеет место формула* (10).

Доказательство. Оценка для $\varphi_n(x)$ следует из одной лишь неотрицательности функции $q(x)$. В самом деле, $\varphi_0(x)$ есть решение уравнения

$$y'' = q(x) y, \tag{11}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Заменяя дифференциальное уравнение (11) интегральным уравнением

$$y = 1 + \int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt$$

и применяя метод последовательных приближений (выбирая в качестве первого приближения 1), мы убедимся, что $\varphi_0(x) > 0$, $\varphi_k(x)$ $(k \geqslant 1)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_k''(x) = q(x)\varphi_k(x) + \varphi_{k-1}(x) \tag{12}$$

и начальным условиям $\varphi_k(0)=0$, $\varphi_k'(0)=0$.

Заменяя уравнение (12) интегральным уравнением

$$\varphi_k(x) = \int_0^x (x-t)\{q(t)\varphi_k(t) + \varphi_{k-1}(t)\}\, dt,$$

предполагая, что $\varphi_{k-1}(t) > 0$ и применяя метод последовательных приближений (выбирая в качестве первого приближения нуль), мы убедимся, что $\varphi_k(x) > 0$.

Для доказательства неотрицательности функции Римана достаточно, очевидно, показать, что для любой неотрицательной функции $f(x, y)$ решение уравнения

$$L_x u - L_y u = -f(x, y), \tag{13}$$

удовлетворяющее начальным условиям (9), неотрицательно для $x \geqslant y$. С этой целью перепишем уравнение (13) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y) - \{q(y) - q(x)\}\, u. \tag{14}$$

Так как для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ функция Римана равна единице, то уравнение (14) может быть заменено интегральным уравнением

$$u = \iint_{\triangle} [f(\xi, \eta) + \{q(\eta) - q(\xi)\}]\, d\xi\, d\eta. \tag{15}$$

В треугольнике $\triangle$ $\xi \geqslant \eta$, поэтому $q(\eta) - q(\xi) \geqslant 0$. Применяя к уравнению (15) метод последовательных приближений (выбирая в качестве первого приближения $u=0$), мы убедимся, что $u \geqslant 0$.

4. Пример. Пусть $L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx}\left(p \geqslant -\frac{1}{2}\right)$. Предыдущая теория непосредственно на этот оператор не распространяется, так как он не имеет вида (1). Тем не менее, формула (10) может быть получена.

В рассматриваемом случае мы имеем [1]

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{2^p \Gamma(p+1)}{(x\sqrt{-\lambda})^p} J_p(x\sqrt{-\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+k+1)} \lambda^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(p+{}^1/_2)} \int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}) \sin^{2p}\varphi \, d\varphi.$$

Наконец, функция Римана определяется с помощью гипергеометрического ряда

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

и имеет вид

$$v(x, y; \xi, \eta) =$$

$$= \frac{(4\xi\eta)^{2p+1} \frac{1}{2} |\xi^2 - \eta^2|}{[(y+\eta)^2 - (x-\xi)^2]^{p+{}^1/_2} [x+\xi)^2 - (y-\eta)^2]^{p+{}^1/_2}} F(p+{}^1/_2, p+{}^1/_2, 1; \sigma),$$

где

$$\sigma = \frac{[(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2][(x+\xi)^2 - (y+\eta)^2]}{[(x-\xi)^2 - (y+\eta)^2][(x+\xi)^2 - (y-\eta)^2]}.$$

Легко видеть, что в треугольнике $\triangle$ $y+\eta \geqslant |x-\xi|$, $x+\xi \geqslant y-\eta$, $x+\xi \geqslant y+\eta$, $y-\eta \geqslant |x-\xi|$. Поэтому $(y+\eta)^2 - (x-\xi)^2 \geqslant 0$, $(x+\xi)^2 - (y-\eta)^2 \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$ и, следовательно, $v \geqslant 0$. Поэтому формула (10) справедлива, и мы имеем ($x \geqslant y$, $x, y \geqslant 0$)

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(p+{}^1/_2)} \int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}) \sin^{2p}\varphi \, d\varphi =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{y}{2}\right)^{2k} \left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx}\right\}^k f(x) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+n+2)} \left(\frac{y}{2}\right)^{2n+2} \left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{dx}\frac{d}{dx}\right\}^{(n+1)} f(\zeta)\Big|_{\zeta = x+\theta y}.$$

Поступило
10 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Delsartes, Journ. des Math. pures et appl., 17, 3, 213 (1938). [2] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1945, стр. 352.