Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. П. ЕГОРОВ

О ГРУППАХ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ОБЩЕЙ НЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 20 V 1950)

1. Для пространств L_n несимметрической аффинной связности с объектом перенесения $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, как известно, система определяющих уравнений инфинитезимальных преобразований группы движений относительно v^{σ}, $u^{\sigma}_{\tau}=v^{\sigma}_{\tau}$, имеет вид

$$v^{\alpha}_{\beta}=u^{\alpha}_{\beta}, \tag{1}$$

$$u^{\alpha}_{\beta,\gamma}=R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\,v^{\delta}, \tag{2}$$

$$v^{\sigma}\,\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma,\sigma}+u^{\sigma}_{\beta}\,\Omega^{\alpha}_{\sigma\gamma}+u^{\sigma}_{\gamma}\,\Omega^{\alpha}_{\beta\sigma}-u^{\alpha}_{\sigma}\,\Omega^{\sigma}_{\beta\gamma}=0, \tag{3}$$

где тензор кручения $\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Lambda^{\alpha}_{[\beta\gamma]}$, $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ — тензор кривизны пространства с объектом $\Lambda^{\alpha}_{(\beta\gamma)}$, по которому и ведется ковариантное дифференцирование. Мы назовем пространства L_n общей несимметрической связности, если они обладают общей структурой тензора кручения $\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$, в отличие от пространств несимметрической связности (иногда называемых полусимметрическими), для которых

$$\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\beta}\,\Omega_{\gamma}-\delta^{\alpha}_{\gamma}\,\Omega_{\beta}. \tag{4}$$

В последнем случае максимальный порядок полных групп движений пространств L_n несимметрической связности равен n^2 (1).

В этой заметке решается вопрос о возможном максимальном порядке групп движений пространств общей несимметрической связности.

2. Для того чтобы L_n было пространством полусимметрической связности, необходимо, как показывают соотношения (4), обращение в нуль составляющих тензора кручения для всех индексов $\alpha\neq\beta,\gamma$ в любой системе координат:

$$\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}=0. \tag{5}$$

В этом случае имеют место равенства

$$\Omega^{1}_{1\alpha}=\Omega^{2}_{2\alpha}=\cdots=\Omega^{i}_{i\alpha}=\cdots=\Omega^{n}_{n\alpha}\quad(\alpha\neq i),$$

определяющие своей общей величиной составляющую Ω_{α} некоторого вектора, через который тензор $\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$ представляется в форме (4).

Следовательно, необходимым и достаточным условием того чтобы L_n было L_n с полусимметрической связностью, является выполнение в каждой системе координат формул (5).

3. Не выписывая подробно условия интегрируемости смешанной системы дифференциальных уравнений в частных производных (1), (2), (3), будем рассматривать случай, когда эти условия вместе с уравнениями (3) и все другие соотношения, получаемые из тех и других путем дальнейших дифференцирований и заменой в них производных от искомых функций на правые части (1) и (2), приводятся к $s < 3n - 6$ линейно независимым соотношениям относительно v^σ, u^σ_τ. Рассмотрим алгебраические соотношения (3), налагаемые на решения системы уравнений (1), (2). Матрица, составленная из коэффициентов при u^σ_τ в этих уравнениях, будет вида

$$\| T^1_1\binom{\alpha}{\beta\gamma},\ T^1_2\binom{\alpha}{\beta\gamma}, \ldots,\ T^1_n\binom{\alpha}{\beta\gamma}, \ldots,\ T^n_n\binom{\alpha}{\beta\gamma} \|, \tag{6}$$

где положено

$$T^\tau_\sigma\binom{\alpha}{\beta\gamma} = \delta^\tau_\beta\, \Omega^\alpha_{\sigma\gamma} + \delta^\tau_\gamma\, \Omega^\alpha_{\beta\sigma} - \delta^\alpha_\sigma\, \Omega^\tau_{\beta\gamma}.$$

4. Возьмем произвольную составляющую тензора кручения вида $\Omega^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_3}$ (все α_i в дальнейшем различны) и отнесем минор матрицы (6) порядка $3n - 6$, соответствующий искомым функциям u^σ_τ с индексами

$$\binom{\alpha_1}{\alpha_1},\ \binom{\alpha_2}{\alpha_1},\ \binom{\alpha_3}{\alpha_1}, \ldots, \binom{\alpha_n}{\alpha_1},\ \binom{\alpha_2}{\alpha_4},\ \binom{\alpha_2}{\alpha_5}, \ldots, \binom{\alpha_2}{\alpha_n},\ \binom{\alpha_3}{\alpha_4},\ \binom{\alpha_3}{\alpha_5}, \ldots, \binom{\alpha_3}{\alpha_n}$$

и уравнениям

$$\binom{\alpha_1}{\alpha_1\alpha_3},\ \binom{\alpha_2}{\alpha_2\alpha_3}, \ldots, \binom{\alpha_n}{\alpha_2\alpha_3},\ \binom{\alpha_1}{\alpha_4\alpha_3}, \ldots, \binom{\alpha_1}{\alpha_n\alpha_3},\ \binom{\alpha_1}{\alpha_4\alpha_2}, \ldots, \binom{\alpha_1}{\alpha_n\alpha_2}.$$

Будем иметь

$$T^{\alpha_1}_{\alpha_k}\binom{\alpha_l}{\alpha_2\alpha_3} = -\delta^l_k\, \Omega^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_3} \quad (l,\ k = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n),$$

$$T^{\alpha_1}_{\alpha_k}\binom{\alpha_1}{\alpha_l\alpha_3} = T^{\alpha_1}_{\alpha_k}\binom{\alpha_1}{\alpha_l\alpha_2} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, n;\ l = 4, 5, \ldots, n),$$

$$T^{\alpha_l}_{\alpha_3}\binom{\alpha_1}{\alpha_k\alpha_3} = \delta^l_k\, \Omega^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_3}, \quad T^{\alpha_l}_{\alpha_2}\binom{\alpha_1}{\alpha_k\alpha_2} = 0 \quad (l,\ k = 4,\ 5, \ldots, n),$$

$$T^{\alpha_l}_{\alpha_3}\binom{\alpha_1}{\alpha_k\alpha_2} = \delta^l_k\, \Omega^{\alpha_1}_{\alpha_3\alpha_3} \quad (l,\ k = 4,\ 5, \ldots, n),$$

$$T^{\alpha_l}_{\alpha_2}\binom{\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3} - T^{\alpha_l}_{\alpha_3}\binom{\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3} = 0 \quad (l \geqslant 4),$$

откуда следует, что выделенный минор равен с точностью до знака степени рассматриваемой составляющей $\Omega^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_3}$.

5. Соединяя изложенное в пп. 2, 3, 4 с вопросом существования линейно независимых решений системы уравнений (1), (2), (3), обеспечивающих также линейную независимость (с постоянными коэффициентами) одних только векторов v^σ, и учитывая, что скобка Пуассона любой пары этих векторов является снова решением определяющих уравнений инфинитезимальных преобразований группы, мы придем к выводу, что порядок полных групп движений пространств общей

несимметрической связности не выше $r = n^2 - 2n + 6$. Установленная граница точная: группа порядка $r = n^2 - 2n + 6$

$$x^2p_2 + x^1p_1, \quad x^3p_3 + x^1p_1, \quad x^2p_3, \quad x^3p_2,$$
$$p_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n),$$
$$x^tp_s \quad (t = 2,\ 3, \ldots,\ n;\ s = 1,\ 4,\ 5, \ldots,\ n)$$

является полной группой движений пространства

$$\Lambda^1_{23} = a, \quad \Lambda^1_{32} = -a, \quad \text{остальные } \Lambda^\alpha_{\beta\gamma} = 0.$$

Буквой a обозначена отличная от нуля постоянная. В этом случае имеем

$$\Lambda^\alpha_{(\beta\gamma)} = 0, \quad \Omega^1_{23} = a, \quad \text{остальные } \Omega^\alpha_{\beta\gamma} = 0,$$

и составляющие тензора кривизны $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ обращаются в нуль.

Таким образом, мы приходим к следующему результату:

Теорема. *Наибольший порядок полных групп движений пространств общей несимметрической аффинной связности равен* $r = n^2 - 2n + 6$.

6. Можно доказать, что симметрические связности $\Lambda^\alpha_{(\beta\gamma)}$ всех пространств $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$, обладающих группами движений максимального порядка $(n^2 - 2n + 6)$, являются необходимо проективноевклидовыми.

Поступило
8 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Егоров, ДАН, 64, № 5 (1949).