Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Ф. Д. ГАХОВ

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ n ПАР ФУНКЦИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 11 V 1950)

§ 1. Пусть L есть простая, достаточно гладкая замкнутая кривая, ограничивающая внутреннюю область S^+ и внешнюю область S^-.

Определить векторы $\varphi^+(z)=\{\varphi_1(z),\ldots,\varphi_n(z)\}$, $\varphi^-(z)=\{\varphi_1^-(z),\ldots,\varphi_n^-(z)\}$, голоморфные, соответственно, в областях S^+ и S^-, предельные значения которых на контуре удовлетворяют краевому условию

$$\varphi^+(t)=C(t)\varphi^-(t). \tag{1}$$

На элементы $C_{kj}(t)$ матрицы $C(t)$ нужно наложить такие ограничения, при которых существуют предельные значения интеграла типа Коши от них, причем эти предельные значения функции того же класса, что и сами элементы. В ставших классическими работах [1,2] таким ограничением являлось условие Липшица — Гельдера, в последних работах Л. Г. Магнарадзе [3] решение распространено на функции, удовлетворяющие условию

$$|C(t_2)-C(t_1)|<\frac{A}{[\lg(t_2-t_1)]^{p+1}},\quad p>0\,^* \tag{2}$$

Это условие и можно принять за основу.

Допустим, что коэффициенты краевого условия (1) удовлетворяют условию (2) всюду, кроме конечного числа точек $t_1,\ldots,t_m$, где они имеют разрывы первого рода $C(t_k-0)\neq C(t_k+0)$. Рассмотрение такого рода задач имеет большое практическое значение, так как к ним приводятся различного рода „смешанные“ краевые задачи.

Задачу (1) с разрывными коэффициентами рассматривал впервые Гильберт [4] весьма сложным способом и затем более отчетливо Племели [1]. Метод Племели заключался в приведении матрицы коэффициентов в точке разрыва к канонической форме, после чего подбирались функции, устраняющие разрывы, и задача приводилась к таковой с непрерывными коэффициентами **. Племели не пользуется матричными обозначениями, и поэтому его рассуждения, несмотря на свою принципиальную простоту, громоздки и трудно обозримы. Н. П. Векуа [5] решил задачу, по существу, тем же методом, но использовал матрич-

* В работе [3] дается (без доказательства) условие $|C(t_2)-C(t_1)|<\frac{A}{[\lg(t_2-t_1)]^p}$, $p>0$, но это условие является, очевидно, опечаткой и должно быть исправлено на данное в тексте.

** Гильберт и Племели рассматривали частный случай задачи, когда коэффициенты кусочно-постоянные числа. Но это несущественно, так как при решении принимаются во внимание только предельные значения коэффициентов в точках разрыва.

ные обозначения и элементы теории функций от матриц (степенная функция от матрицы в канонической форме), и его решение сильно выиграло в смысле простоты и отчетливости. Л. Г. Магнарадзе [3] решил задачу способом, мало отличающимся от способа Н. П. Векуа, но для коэффициентов, удовлетворяющих вне точек разрыва условию (2).

В настоящей заметке я, пользуясь теорией функций от матриц в большем объеме, чем предшествующие авторы, даю решение той же задачи, не пользуясь приведением матрицы в точках разрыва к канонической форме, отчего, по моему мнению, решение становится еще более простым и отчетливым.

§ 2. Рассмотрим сначала, для простоты, случай одной точки разрыва. Пусть $C(t)$ — матрица и t_1 — точка разрыва ее элементов.

$$\gamma = C^{-1}(t_1+0)\,C(t_1-0)\ {}^{*}, \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{1}{2\pi i}\lg\gamma. \tag{4}$$

Матрица λ определится единственным образом, если задать определенные ветви логарифмов корней характеристического уравнения

$$|\gamma - \rho E| = 0. \tag{5}$$

Последние, в свою очередь, становятся известными, если наложить определенные ограничения на поведение искомых функций в точке разрыва t_1, например, хотя бы потребовать, чтобы искомые функции в этой точке были ограниченными или обращались в бесконечность интегрируемого порядка.

Введем функции матриц

$$\omega^+(z) = (z-t_1)^\lambda = e^{\lambda\lg(z-t)}, \quad \omega^-(z) = \left(\frac{z-t_1}{z-z_0}\right)^\lambda = e^{\lambda\lg\left(\frac{z-t_1}{z-z_0}\right)}. \tag{6}$$

Поведение этих функций хорошо изучено в работах И. А. Лаппо-Данилевского по дифференциальным уравнениям. В точке t_1 элементы матриц ω^+, ω^- имеют особенность характера: степенной функции, если элементарные делители матрицы $\gamma - \rho E$ простые, и произведения степенной функции на степень логарифма, если элементарные делители кратные. При обходе около точки z_0 функция $(z-z_0)^\lambda$ приобретает матричный множитель.

Пусть, так же как в предыдущем, t_1 лежит на линии разреза функции $(z-z_0)^\lambda$; тогда, приняв, что

$$\lim_{t\to t_1+0}(t-z_0)^\lambda = (t_1-z_0)^\lambda,$$

будем иметь

$$\lim_{t\to t_1-0}(t-z_0)^\lambda = e^{2\pi i\lambda}(t_1-z_0)^\lambda = \gamma(t_1-z_0)^\lambda. \tag{7}$$

Введем новые векторы $f_1^+(z)$, $f_1^-(z)$ подстановкой

$$f^+(z) = C(t_1+0)(z-t_1)^\lambda f_1^+(z), \quad f^-(z) = \left(\frac{z-t_1}{z-z_0}\right)^\lambda f_1^-(z).$$

Последние будут удовлетворять следующему краевому условию:

$$f_1^+(t) = (t-t_1)^{-\lambda}\,C^{-1}(t_1+0)\,C(t)\left(\frac{t-t_1}{t-z_0}\right)^\lambda f_1(t).$$

* Считаем, что левая окрестность точки разрыва t_1-0 получается из правой окрестности t_1+0 путем положительного обхода контура.

Покажем, что матрица $C_1(t) = (t - t_1)^{-\lambda} C^{-1}(t_1 + 0) C(t) \left(\frac{t - t_1}{t - z_0}\right)^{\lambda}$ непрерывна в точке t_1,

$$C_1(t_1 + 0) = \lim_{t \to t_1 + 0} \left[(t - t_1)^{-\lambda} C^{-1}(t_1 + 0) C(t) \left(\frac{t - t_1}{t - z_0}\right)^{\lambda}\right] = (t_1 - z_0)^{-\lambda},$$

и, учитывая (3) и (7),

$$C_1(t_1 + 0) = \lim_{t \to t_1 - 0} \left[(t - t_1)^{-\lambda} C^{-1}(t_1 + 0) C(t - 0) \left(\frac{t - t_1}{t - z_0}\right)^{\lambda}\right] =$$

$$= \lim_{t \to t_1 - 0} \left[(t - t_1)^{-\lambda} \gamma \gamma^{-1} \left(\frac{t - t_1}{t_1 - z_0}\right)^{\lambda}\right] = (t - z_0)^{-\lambda}.$$

Таким образом, задача приведена к случаю непрерывных коэффициентов.

§ 3. Рассмотрим общий случай. Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — точки разрыва. В случае одной пары функций этот случай не представляет никаких новых трудностей по сравнению со случаем одного разрыва. Для случая системы n пар функций дело осложняется некоммутативностью произведения матриц. Но и это затруднение удается легко преодолеть и, как сейчас будет показано, вопрос решается единообразным методом.

Пусть $\gamma_k = C^{-1}(t_k + 0) C(t_k - 0), \quad \lambda_k = \frac{1}{2\pi i} \lg \gamma_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$,

$\Omega_k^+(z) = A_k C(t_k + 0)(z - t_k)^{\lambda_k}, \ \Omega_k^-(z) = B_k \left(\frac{z - t_k}{z - z_0}\right)^{\lambda_k}$, где A_k, B_k — постоянные матрицы, определяемые формулами $A_1 = 1$, $A_j = \left[\prod_{k=1}^{j-1} \Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}$,

$$B_1 = 1, \quad B_j = \left[\prod_{k=1}^{j-1} \Omega_k^-(t_j)\right]^{-1} \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Постоянные матрицы A_k, B_k вводятся, как выяснится из дальнейшего, для того, чтобы устранить лишние матричные множители, мешающие образованию непосредственного произведения $(t - t_j)^{\lambda_j} \left(\frac{t - t_j}{t - z_0}\right)^{\lambda_j}$.

Введя новые векторы $f_1^+(z)$, $f_1^-(z)$ подстановкой

$$f^+(z) = \prod_{k=1}^{m} \Omega_k^+(z) f_1^+(z), \quad f^-(z) = \prod_{k=1}^{m} \Omega_k^-(z) f_1^-(z),$$

придем к краевому условию

$$f_1^+(t) = \left[\prod_{k=1}^{m} \Omega_k^+(t)\right]^{-1} C(t) \prod_{k=1}^{m} \Omega_k^-(t) f_1^-(t).$$

Покажем, что матрица

$$C_1(t) = \left[\prod_{k=1}^{m} \Omega_k^+(t)\right]^{-1} C(t) \prod_{k=1}^{m} \Omega_k^-(t)$$

непрерывна во всех точках $t_1, \ldots, t_m$. Учитывая, что функции Ω_j непрерывны во всех точках t_k $(k \neq j)$, а также условие $\lim_{t \to t_1 - 0} (t - z_0)^{\lambda_j} = \gamma_j (t_j - z_0)^{\lambda_j}$, получим

$$C_1(t_j+0)\lim_{t\to t_j+0}\left[\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}(t-t_j)^{-\lambda_j}C^{-1}(t_j+0)A_j^{-1}\left[\prod_{k=1}^{j-1}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}\times$$

$$\times C(t_j+0)\prod_{k=1}^{j-1}\Omega_k^-(t_j)B_j\left(\frac{t-t_j}{t-z_0}\right)^{\lambda_j}\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^-(t_j)=$$

$$=\left[\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}\lim_{t\to t_j+0}\left\{(t-t_j)^{-\lambda_j}\left(\frac{t-t_j}{t-z_0}\right)^{\lambda_j}\right\}\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^-(t_j)=$$

$$=\left[\prod_{k=1}^{j+1}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}(t_j-z_0)^{-\lambda_j}\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^-(t_j),$$

$$C_1(t_j-0)=\lim_{t\to t_j-0}\left[\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}(t-t_j)^{-\lambda_j}C^{-1}(t_j+0)A_j^{-1}\left[\prod_{k=1}^{j-1}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}\times$$

$$\times C(t_j-0)\prod_{k=1}^{j-1}\Omega_k^-(t_j)B_j\left(\frac{t-t_j}{t-z_0}\right)^{\lambda_j}\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^-(t_j)=$$

$$=\left[\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}\lim_{t\to t_j-0}\left\{(t-t_j)^{-\lambda_j}\gamma\gamma^{-1}\left(\frac{t-t_j}{t_j-z_0}\right)^{\lambda_j}\right\}\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^-(t_j)=$$

$$=\left[\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}(t_j-z_0)^{-\lambda_j}\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^-(t_j),$$

т. е.

$$C(t_j+0)=C(t_j-0).$$

Таким образом, мы пришли к задаче с непрерывными коэффициентами, что и составляло предмет нашего исследования. После того как будет решена однородная задача (найдена каноническая матрица), решение неоднородной задачи

$$f^+(t)=C(t)f^-(t)+B(t)$$

может быть произведено обычным способом.

§ 4. Если матричные функции $\Omega_k^+(z)$, $\Omega_k^-(z)$ вычислять путем приведения матрицы γ_k к канонической форме, то, как нетрудно показать, данное здесь решение приведется к решению Н. П. Векуа ([5]). Но, как известно, функции от матриц могут вычисляться и другими способами, например, хотя бы по формуле Лагранжа — Сильвестра, так что данное здесь решение, вообще говоря, отличается от известных не только формой, но и, может быть, вычислительными приемами. Преимущество данного здесь способа я вижу прежде всего в том, что принципиальная сторона дела (введение матричного множителя, устраняющего разрыв) отделена от вычислительной стороны, отчего решение выигрывает в ясности.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
5 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Plemelj, Monatsh. f. Math. u. Phys., **19** (1908). [2] Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, **12** (1943). [3] Л. Г. Магнарадзе, ДАН, **64**, № 1 (1949). [4] D. Hilbert, Göttingen Nachrichten, H. 4, 307 (1905). [5] Н. П. Векуа, Сообщ. АН Груз.ССР, **5**, № 1 (1944).