Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

В. С. ВИДЕНСКИЙ

ОБ ОЦЕНКЕ ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОЧЛЕНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 16 V 1950)

Известно, что всякий положительный на отрезке $[-1, +1]$ многочлен $H(x)$ степени m может быть однозначно представлен в каждой из двух форм:

$$H(x) = M_s^2(x) + (1-x^2) N_{s-1}^2(x) \tag{1}$$

при любом заданном целом $s \geqslant m/2$;

$$H(x) = (1+x) K_s^2(x) + (1-x) L_s^2(x) \tag{2}$$

при любом заданном целом $s \geqslant (m-1)/2$, где $M_s(x)$ и N_{s-1} — действительные многочлены степени s и $s-1$, причем все нули обоих многочленов лежат на интервале $(-1, +1)$ и взаимно разделены, $M_s(1) > 0$, $N_{s-1}(1) > 0$; $K_s(x)$ и $L_s(x)$ — действительные многочлены степени s, причем все нули функций $\sqrt{1+x}\, K_s(x)$ и $\sqrt{1-x}\, L_s(x)$ лежат на отрезке $[-1, +1]$ и взаимно разделены, $K_s(1) > 0$, $L_s(1) > 0$.

В моей заметке [1] была доказана такая теорема:

Если многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет неравенству

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{M_n^2(x) + (1-x^2) N_{n-1}^2(x)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$

то

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant |\{M_n(x) + i\sqrt{1-x^2}\, N_{n-1}(x)\}^{(k)}|, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

причем равенство достигается только для многочлена $P_n(x) = \gamma M_n(x)$, $|\gamma| = 1$.*

Исходя из представления $H(x)$ в форме (2), получаем следующий результат:

Теорема 1. *Если многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет неравенству*

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{(1+x) K_n^2(x) + (1-x) L_n^2(x)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

то

$$|P_n^{(k)}(x)| < |\{\sqrt{1+x}\, K_n(x) + i\sqrt{1-x}\, L_n(x)\}^{(k)}|, \tag{6}$$
$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad (k=1, \ldots, n).$$

* При $k = 1$ эта теорема была доказана С. Н. Бернштейном в работе [2].

При $k=1$ доказательство непосредственно получается из неравенства (6) статьи ([2]) С. Н. Бернштейна. Доказательство этой теоремы для производных высших порядков основывается на следующих леммах, аналогичных тем, которые приведены в заметке ([1]).

Лемма 1. *Пусть $Q_n(x)$ и $R_n(x)$ — действительные многочлены степени n; если все нули функций $\sqrt{1+x}\,Q_n(x)$ и $\sqrt{1-x}\,R_n(x)$ лежат на отрезке $[-1, +1]$ и взаимно разделены, то k-я производная ($k=1, 2, \ldots, n$) каждой из этих функций $\{\sqrt{1+x}\,Q_n(x)\}^{(k)}$ и $\{\sqrt{1-x}\,R_n(x)\}^{(k)}$ имеет $n-k+1$ и только $n-k+1$ нулей на интервале $(-1, +1)$, причем их нули взаимно разделены.*

Лемма 2. *Если $P_n(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$, удовлетворяющий неравенству (5), то при любом вещественном α первые n производных функции*

$$F(x, \alpha) = \cos\alpha\sqrt{1+x}\,K_n(x) + \sin\alpha\sqrt{1-x}\,L_n(x) - P_n(x)$$

имеют на отрезке $[-1, +1]$ только простые нули.

Так как неравенства (4) и (6) имеют место лишь на интервале $(-1, +1)$, причем их правые части неограниченно возрастают при $x\to\pm 1$, то интересно уточнить эти оценки в окрестности концов отрезка и распространить их на всю действительную ось.

Теорема 2. I. *Если многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет неравенству (3), то*

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant |M_n^{(k)}(x)| \quad \text{при} \quad x<\xi_1 \text{ и } x>\xi_{n-k+1}, \tag{7}$$

где $\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_{n-k+1}$ — все нули функции $\{\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x)\}^{(k)}$, лежащие на интервале $(-1, +1)$, причем равенство достигается только для многочлена $P_n(x)=\gamma M_n(x)$, $|\gamma|=1$.

II. *Если многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет неравенству (5), то*

$$|P_n^{(k)}(x)| < |\{\sqrt{1+x}\,K_n(x)\}^{(k)}| \quad \text{при} \quad x>y_{n+1-k}, \tag{8^1}$$

$$|P_n^{(k)}(x)| < |\{\sqrt{1-x}\,L_n(x)\}^{(k)}| \quad \text{при} \quad x<x_1$$

$$(k=1, 2, \ldots, n), \tag{8^2}$$

где $x_1<x_2<\ldots<x_{n+1-k}$ — все нули $\{\sqrt{1+x}\,K_n(x)\}^{(k)}$, лежащие на интервале $(-1, +1)$, а $y_1<y_2<\ldots<y_{n+1-k}$ — все нули $\{\sqrt{1-x}\,L_n(x)\}^{(k)}$, лежащие на интервале $(-1, +1)$.

Докажем I, причем будем предполагать, что коэффициенты многочлена $P_n(x)$ действительны. Распространение этих утверждений на случай комплексных коэффициентов не составляет труда. Пусть $P_n(x)\neq\pm M_n(x)$, $x_0>\xi_{n-k+1}$ и предположим, что $P_n^{(k)}(x_0)\geqslant M_n^{(k)}(x_0)$. Выберем действительное число μ так, чтобы $\mu P_n^{(k)}(x_0)=M_n^{(k)}(x_0)$. Так как $0<\mu\leqslant 1$, то $\mu P_n(x)$ удовлетворяет (3), и из (4) получаем

$$|\mu P_n^{(k)}(\xi_i)| < |M_n^{(k)}(\xi_i)|, \quad 1\leqslant i\leqslant n-k+1.$$

Ввиду того, что нули $M_n^{(k)}(x)$ и $\{\sqrt{1-x^2}\,N_{n-1}(x)\}^{(k)}$ взаимно разделены, $M_n^{(k)}(\xi_i)\,M_n^{(k)}(\xi_{i+1})<0$, откуда следует, что многочлен $(n-k)$-й степени $M_n^{(k)}(x)-\mu P_n^{(k)}(x)$ имеет $n-k$ нулей на отрезке $[\xi_1, \xi_{n-k+1}]$ и нуль в точке $x_0>\xi_{n+1-k}$.

Аналогично доказываются неравенства (8).

Можно доказать, что *всякий положительный на полуоси* $[0, \infty]$ *многочлен* $G(x)$ *степени* m *может быть однозначно представлен в следующей форме:*

$$G(x) = A^2(x) + xB^2(x), \tag{9}$$

где $A(x)$ *и* $B(x)$ — *многочлены с положительными старшими коэффициентами степени* n *и* $n-1$, *соответственно, если* $m = 2n$, *и оба степени* n, *если* $m = 2n+1$, *причем все нули* $A(x)$ *и* $\sqrt{x}\,B(x)$ *лежат на положительной полуоси и взаимно разделены.*

Применяя метод* заметки ([1]), можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Если многочлен* $P_n(x)$ *степени* $\leqslant n$ *удовлетворяет неравенству*

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{G(x)} = \sqrt{A^2(x) + xB^2(x)}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{10}$$

то

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant |\{A(x) + i\sqrt{x}\,B(x)\}^{(k)}|, \quad 0 \leqslant x \leqslant \infty$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

причем равенство достигается только для многочлена $P_n(x) = \gamma A(x)$, *где* $|\gamma| = 1$.

Теорема 4. *Если многочлен* $P_n(x)$ *удовлетворяет неравенству* (10), *то*

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant |A_n^{(k)}(x)| \quad \text{при } x < x_0, \tag{12}$$

где x_0 — *наименьший из нулей функции* $\{\sqrt{x}\,B(x)\}^{(k)}$, *лежащих на положительной полуоси. Равенство достигается только при* $P(x) = \gamma A(x)$, *где* $|\gamma| = 1$.

Следствие. *Среди функций вида*

$$f(x) = \frac{c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n}{\sqrt{A^2(x) + xB^2(x)}}$$

при заданном коэффициенте c_s $(0 \leqslant s \leqslant n)$ *наименее уклоняется от нуля на всей положительной полуоси функция*

$$f_0(x) = \frac{\lambda A(x)}{\sqrt{A^2(x) + x B^2(x)}},$$

где $\lambda = \dfrac{s!\, c_s}{A^{(s)}(0)}$.

Выражаю искреннюю благодарность акад. С. Н. Бернштейну за внимательное отношение к моей работе.

Поступило
14 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Виденский, ДАН, **67**, № 5 (1949). [2] С. Н. Бернштейн, C. R. **190**, 237, 338 (1930).

* С. Н. Бернштейн, которому я сообщил теорему 3, указал мне что ее можно получить непосредственно из неравенств (4) (если $m = 2n$) и (6) (если $m = 2n+1$), применяя их на отрезках растущей длины $[0, t]$ при $t \to \infty$.