Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. М. ВАЙНБЕРГ

О НЕПРЕРЫВНОСТИ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 V 1950)

Пусть $f(u, x)$ есть действительная функция, определенная для всех действительных u и всех $x \in B$, где B есть измеримое множество евклидова пространства n измерений. Будем предполагать, что $f(u, x)$ непрерывна по u при каждом фиксированном $x \in B$ и измерима в B по x при каждом фиксированном u.

В этом случае можно показать, что если $v(x)$ измерима в B, то $f(v(x), x)$ также измерима в B.

Рассмотрим оператор $hu = f(u(x), x)$, который отображает некоторые элементы $u \in L_p$ в элементы $hu \in L_{p_1}$ $(p \geqslant 1;\ p_1 \geqslant 1)$. Оператор hu называется непрерывным в точке v, если, какова бы ни была последовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots$, сходящаяся к v последовательность $hu_1, hu_2, hu_3, \ldots$ сходится к hv, т. е., из $\| v - u_m \| \to 0$ при $m \to \infty$ следует, что $\| hv - hu_m \| \to 0$, где

$$\| u \| = \left(\int_B | u(x) |^p dx \right)^{1/p}, \quad \| hu \| = \left(\int_B | hu |^{p_1} dx \right)^{1/p_1}.$$

Это определение эквивалентно следующему, Оператор hu непрерывен в точке v, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $\| u - v \| < \delta$ следует $\| hu - hv \| < \varepsilon$. Оператор hu называется непрерывным в L_p, если он непрерывен в каждой точке L_p.

Для дальнейшего введем обозначения

$$\| u \|_F = \left(\int_F | u(x) |^p dx \right)^{1/p}, \quad \| hu \|_F = \left(\int_F | hu |^{p_1} dx \right)^{1/p_1},$$

где F есть измеримое подмножество множества B.

Теорема 1. *Для того чтобы из сходимости в L_p u_m к u_0 $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ вытекала сходимость в L_{p_1} hu_m к hu_0, необходимо и достаточно, чтобы каждому $\varepsilon > 0$ отвечало такое $\eta > 0$, что для любого множества $F \subset B$, для которого* $\operatorname{mes} F < \eta$, *и всех m имело бы место неравенство $\| hu_m \|_F < \varepsilon$.*

Необходимость. Пусть при $m \to \infty$ из $\| u_m - u_0 \| \to 0$ следует, что $\| hu_m - hu_0 \| \to 0$; тогда каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $m_0(\varepsilon)$, что для всех $m \geqslant m_0$ будет $\| hu_m - hu_0 \| < \varepsilon / 2$. Отсюда $\| hu_m \| \leqslant \| hu_0 \| + \| hu_m - hu_0 \| \leqslant \| hu_0 \| + \varepsilon / 2$. Так же найдем, что для всякого измеримого $F \subset B$ будет $\| hu_m \|_F \leqslant \| hu_0 \|_F + \varepsilon / 2$. Далее, так как при всяком m $hu_m \in L_p$, то заданному $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta_m > 0$, что при выполнении условия $\operatorname{mes} F < \delta_m$ будет $\| hu_m \|_F < \varepsilon / 2$. Полагая $\eta = \min(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{m_0-1})$, мы найдем, что для всех m $\| hu_m \|_F < \varepsilon$, как только $\operatorname{mes} F < \eta$.

Достаточность. Из условия теоремы вытекает, что для всякого m $hu_m \in L_{p_1}$, ибо B можно разбить на N частей так, чтобы мера каждой части была меньше η, и тогда мы будем иметь $\| hu_m \|^{p_1} < \varepsilon N$. Далее, как показал В. В. Немыцкий [1], каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что при $| u_m(x) - u_0(x) | < \delta$ будет $| hu_m - hu_0 | < \varepsilon$ на множестве $E \subset B$, где $\operatorname{mes}(B - E) < {}^1/_2\, \eta$. Но, по условию, $\| u_m - u_0 \| \to 0$ при $m \to \infty$, поэтому найдется такое $m_1(\varepsilon, \eta)$, что при $m \geqslant m_1$ $| u_m(x) - u_0(x) | < \delta$ для $x \in E_m \subset B$, где $\operatorname{mes}(B - E_m) < {}^1/_2\, \eta$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{mes}(B - EE_m) < \eta$, ибо $B = (B - E) + (B - E_m) + EE_m = F_m + EE_m$, притом $| hu_m - hu_0 | < \varepsilon$ на EE_m. Следовательно, $\| hu_m - hu_0 \|^{p_1} = \| hu_m - hu_0 \|^{p_1}_{EE_m} + \| hu_m - hu_0 \|^{p_1}_{F_m} < \varepsilon^{p_1} \operatorname{mes} B + 2^{p_1} \varepsilon^{p_1}$, ибо из условия теоремы следует, что $\| hu_m - hu_0 \|_{F_m} \leqslant \| hu_m \|_{F_m} + \| hu_0 \|_{F_m} < 2\varepsilon$. Отсюда $\| hu_m - hu_0 \| < \varepsilon (\operatorname{mes} B + 2^{p_1})^{1/p_1}$, а значит, в силу произвольности ε, $\| hu_m - hu_0 \| \to 0$ при $m \to \infty$. Теорема доказана.

Следствие. Из этой теоремы вытекает, что для непрерывности hu в точке u_0 необходимо и достаточно, чтобы условие теоремы выполнялось для любой последовательности, сходящейся к u_0; при этом, как легко видеть, найдется общее для всех последовательностей положительное η.

Теорема 2. *Для того чтобы оператор hu был непрерывен в L_p, достаточно, чтобы $| f(u, x) | \leqslant a(x) + b\, | u |^{p/p_1}$ для всех u, $x \in B$, где $a(x) \in L_{p_0}$, $b = \mathrm{const}$.*

Данная теорема непосредственно вытекает из теоремы 1.

Теорема 3. *Для непрерывности в L_p оператора hu достаточна его компактность, т. е., чтобы оператор hu отображал всякое ограниченное множество из L_p в компактное множество пространства L_{p_1}.*

Доказательство. Пусть v есть произвольный элемент пространства L_p, а $u_1, u_2, u_3, \ldots$ — какая-нибудь последовательность, сходящаяся к v. Так как $\{u_k\}$ ограничена, то, согласно условию, $\{hu_k\}$ компактна. Из компактности $\{hu_k\}$ следует существование фундаментальной последовательности $\{hu_{n_k}\}$. Значит, каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое k_0, что для всякого r $\| hu_{n_{k_0+r}} - hu_{n_{k_0}} \| < \varepsilon / 2$. Отсюда для всякого измеримого $F \subset B$ будет $\| hu_{n_{k_0+r}} - hu_{n_{k_0}} \|_F < \varepsilon / 2$. Но так как $hu_{n_{k_0}} \in L_{p_1}$, то можно указать такое $\eta_1 > 0$, что $\| hu_{n_{k_0}} \|_F < \varepsilon / 2$ как только $\operatorname{mes} F < \eta_1$. Отсюда и из предыдущего имеем $\| hu_{n_{k_0+r}} \|_F < \varepsilon$. Далее, из компактности hu вытекает, что $hv \in L_{p_1}$, а значит, найдется такое $\eta_2 > 0$, что $\| hv \|_F < \varepsilon$, как только $\operatorname{mes} F < \eta_2$. Полагая теперь $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, получим $\| hv \|_F < \varepsilon$ и $\| hu_{n_{k_0+r}} \|_F < \varepsilon$, как только $\operatorname{mes} F < \eta$. Отсюда, согласно теореме 1, вытекает, что $\| hv - hu_{n_k} \| \to 0$ при $k \to \infty$. Так же найдем, что всякая другая фундаментальная последовательность из $\{hu_k\}$ сходится к hv.

Допустим теперь, что hu_k не сходится к hv. Рассмотрим тогда сходящуюся к нулю убывающую последовательность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Согласно допущению, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется u_{m_k} $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ такое, что $\| v - u_{m_k} \| < \alpha_k$, но $\| hv - hu_{m_k} \| \geqslant \varepsilon$. В силу компактности hu последовательность $\{hu_{m_k}\}$ содержит фундаментальную подпоследовательность, которая, по доказанному, должна сходиться к hv, что, однако, невозможно в силу неравенства $\| hv - hu_{m_k} \| \geqslant \varepsilon$. Полученное противоречие доказывает, что hu_k сходится к hv. Теорема доказана.

Замечание. Заметим, что доказанные здесь теоремы сохраняются для оператора $hu = (h_1 u,\ h_2 u, \ldots,\ h_m u)$, где $h_i\, u = f_i(u_1, u_2, \ldots,\ u_m,\ x)$, $u = (u_1, u_2, \ldots,\ u_m) \in L_{p,\, m}$; $hu \in L_{p_1,\, m}$; $f_i(u_1 u_2, \ldots,\ u_m,\ x)$ непрерывны по $(u_1, u_2, \ldots,\ u_m)$ и измеримы в B по x. В качестве одного из приложений доказанных теорем мы приведем следующее предложение.

Теорема. *Если выполнены условия:*

1) *функции $f_i(u_1, u_2, \ldots,\ u_m,\ x)$ непрерывны по $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ и измеримы в B* по *x, притом*

$$|f_i(u_1, u_2, \ldots,\ u_m,\ x)| \leqslant a_i(x) + \sum_{r=1}^{m} b_{ir} |u_r|^{p-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где $a_i(x) \in L_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $b_{ir} = \mathrm{const}$;

2)
$$\iint\limits_{BB} |K_i(x, y)|^p \,dx\,dy = M_i^p < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где $K_i(x, y)$ — действительные функции, измеряемые в топологическом произведении $B \times B$;

3) *либо $p < 2$, либо $p = 2$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{r=1}^{m} M_i^2 b_{ir}^2 < 1$, либо $p > 2$ и*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} M_i^p \|a_i\|_q^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} M_i^p b_{ir}^p\right)^{1/p} \leqslant 1, \text{ где } \|a_i\|_q = \left(\int\limits_B |a_i(x)|^q \,dx\right)^{1/q},$$

то система нелинейных интегральных уравнений

$$u_i(x) = \int\limits_B K_i(x, y)\, f_i(u_1(y),\ u_2(y), \ldots,\ u_m(y),\ y)\, dy \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее пространству $L_{p,\, m}$.

Из этой теоремы вытекает, что если $K_i(x, y)$ суммируемы в любой степени, то f_i могут расти по u_i как любые многочлены от u_i, если только коэффициенты этих многочленов удовлетворяют некоторым неравенствам.

Действительно, если $P(u) = \alpha(x) + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k u^k\ (a_k = \mathrm{const})$, то $|P(u)| \leqslant$
$\leqslant a(x) + b\,|u|^m$, где $b = \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k|$, $a(x) = |\alpha(x)| + \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k|$. Аналогичные оценки получаются для многочленов от аргументов $(u_1, u_2, \ldots,\ u_r)$.

Поступило
5 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, Матем. сборн., **41**, 440 (1934).