Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 8 V 1950)

1. Обозначим через C пространство непрерывных в интервале $[-1, 1]$ функций. Пусть $U^{[k]}(f, x)$ — линейная операция, переводящая C в C и удовлетворяющая условиям:

1) $U_n^{[k]}(f, x)$ есть алгебраический полином степени $\leqslant n$;

2) если $P(x)$ есть полином степени $\leqslant n$, то

$$U_n^{[k]}(P, x) \equiv P^{(k)}(x).$$

а) Пусть $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ есть ортонормальная система полиномов веса $g(x) \geqslant 0$. Тогда k-я производная от n-й частной суммы ряда Фурье $S_n^{(k)}(f, x)$ является операцией типа $U_n^{[k]}(f, x)$.

б) k-я производная от интерполяционного полинома Лагранжа

$$L_n^{(k)}(f, x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{(n)}) [l_i^{(n)}(x)]^{(k)}$$

также является операцией типа $U_n^{[k]}(f, x)$.

При этом $\{l_i^{(n)}(x)\}_{i=1}^{n}$ — фундаментальные полиномы Лагранжа параболического интерполирования, построенные для n-й строчки матрицы узлов

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \; x_2^{(2)} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ x_1^{(n)} \; x_2^{(n)} \; \ldots \; x_n^{(n)} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{array} \tag{1}$$

$$+1 \geqslant x_1^{(n)} > x_2^{(n)} > \cdots > x_n^{(n)} \geqslant -1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 1. *Норма оператора $U_n^{[k]}(f, x)$ удовлетворяет неравенству*

$$\| U_n^{[k]} \| \geqslant cn^{2k}, \tag{2}$$

где c — абсолютная константа.

Доказательство. Пусть $P(x) = \cos n \arccos x$. Тогда

$$U_n^{[k]}(\cos n \arccos x) = \cos^{(k)} n \arccos x.$$

Легко видеть что

$$\cos^{(k)} n \arccos 1 = \frac{[n^2-(k-1)^2][n^2-(k-2)^2]\cdots(n^2-1)n^2}{(2k-1)!!}.$$

Таким образом, при фиксированном k

$$\cos^{(k)} n \arccos 1 > cn^{2k}.$$

Поэтому

$$\| U_n^{[k]} \| \geqslant cn^{2k}.$$

В частности, применяя неравенство (2) к операторам а) и б), мы получим следующие неравенства:

$$\max_{x\in[-1,1]} \int_{-1}^{1} \left| \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t)\omega_i^{(k)}(x) \right| g(t)\,dt \geqslant cn^{2k} \tag{3}$$

для любой ортонормальной системы полиномов $\{\omega_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ веса $g(x) \geqslant 0$. Для любой матрицы (1) справедливо неравенство

$$\max_{x\in[-1,1]} \sum_{i=1}^{n} \left| [l_i^{(n)}(x)]^{(k)} \right| \geqslant cn^{2k}. \tag{4}$$

2. При $k=1$ из (4) получаем, что для любой матрицы (1) справедливо неравенство

$$\max_{x\in[-1,1]} \sum_{k=1}^{n} \left| [l_k^{(n)}(x)]' \right| \geqslant c_1 n^2. \tag{5}$$

На первый взгляд, может показаться, что для любой матрицы (1) должно иметь место более сильное, чем (5), неравенство

$$\max_{x\in[-1,1]} \sum_{k=1}^{n} \left| [l_k^{(n)}(x)]' \right| \geqslant c_2 n^2 \ln n.$$

Однако любопытно отметить, что неравенство (5) является точным относительно n. Для доказательства последнего замечания достаточно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть n-я строчка матрицы узлов* (1) *составлена из корней полинома* $P_n(x) = (1-x^2)v_n(x)$, *где* $v_n(x) = \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$, $x = \cos\theta$.

Тогда для любого $x \in [-1, 1]$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \left| [l_k^{(n)}(x)]' \right| < c_3 n^2. \tag{6}$$

Доказательство. Заметим, что в данном случае

$$x_k^{(n)} = \cos\theta_{k-1}^{(n)}, \qquad \theta_k = \frac{(k-1)\pi}{n-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$l_1^{(n)}(x) = \frac{-\sin\theta\sin(n-1)\theta}{2(n-1)(\cos\theta-\cos\theta_0)},$$

$$l_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\sin\theta\sin(n-1)\theta}{2(n-1)(\cos\theta-\cos\theta_n)},$$

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{(-1)^k\sin\theta\sin(n-1)\theta}{(n-1)(\cos\theta-\cos\theta_{k-1})};\quad k=2,\ldots,n-1.$$

После простых вычислений мы получим:

$$[l_k^{(n)}(x)]' = \frac{(-1)^{k+1}\cos(n-1)\theta}{\cos\theta-\cos\theta_{k-1}} +$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{\sin(n-1)\theta}{(n-1)\sin\theta}\frac{1-\cos\theta\cos\theta_{k-1}}{(\cos\theta-\cos\theta_{k-1})^2},\quad k=2,3,\ldots,n-1. \tag{7}$$

Легко доказать, что фундаментальные полиномы ограничены в интервале $[-1, 1]$. Действительно, так как $\sin(n-1)\theta_k = 0$, то

$$|l_k^{(n)}(\theta)| = \frac{\sin\theta}{n-1}\left|\frac{\sin(n-1)\theta-\sin(n-1)\theta_{k-1}}{\cos\theta-\cos\theta_{k-1}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta+\theta_{k-1}}{2}} \leqslant 2\cos\frac{\theta-\theta_{k-1}}{2}\quad (k=2,\ldots,n-1).$$

Таким же образом доказывается, что

$$|l_1^{(n)}(x)| \leqslant 1,\quad |l_n^{(n)}(x)| \leqslant 1\quad \text{при } x\in[-1,1].$$

Из неравенства А. А. Маркова следует, что

$$|[l_k^{(n)}(x)]'| \leqslant 2n^2\quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Пусть максимум суммы из (6) достигается при $x_0 = \cos\theta_0$. Без ограничения общности можно считать, что $0\leqslant\theta_0\leqslant\pi/2$.

Допустим, что $\theta_p\leqslant\theta_0<\theta_{p+1}$. Так как $|l_p'(x_0)|+|l_{p+1}'(x_0)|\leqslant 4n^2$, то, как видно из (7), для доказательства теоремы достаточно доказать неравенства

$$S_1 = {\sum_{k=1}^{n}}' \frac{1}{|\cos\theta_0-\cos\theta_k|} \leqslant cn^2,$$

$$S_2 = \frac{1}{n-1}\left|\frac{\sin(n-1)\theta_0}{\sin\theta_0}\right| {\sum_{k=1}^{n}}' \frac{1-\cos\theta\cos\theta_{k-1}}{(\cos\theta_0-\cos\theta_{k-1})^2} \leqslant cn^2.$$

Штрих указывает, что в суммах отсутствуют члены с индексами p и $p+1$.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{|\cos\theta_0+\cos\theta_k|} + \sum_{k=p+2}^{n}\frac{1}{|\cos\theta_0-\cos\theta_k|} = S_1^{(1)} + S_1^{(2)}.$$

Будем оценивать $S_1^{(2)}$. Нетрудно убедиться, что

$$\frac{1}{|\cos\theta_0-\cos\theta_k|} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2\left|\sin\frac{\theta_0-\theta_k}{2}\right|\left|\sin\frac{\theta_k}{2}\right|},$$

$$S_1^{(2)} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=p+2}^{n} \frac{1}{\sin \frac{\theta_0 - \theta_k}{2} \left| \sin \frac{\theta_k}{2} \right.} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \pi^2 \sum_{k=p+2}^{n} \frac{(n-1)^2}{(k-p-1) k \pi^2} < c_4 n^2 .$$

$S_1^{(1)}$ оценивается аналогичным образом. Из выражения для S_2 видно, что

$$S_2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{1 - \cos \theta_0 \cos \theta_k}{2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta_k}{2} - 2 \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta_k}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta_k}{2}} .$$

Окончательная оценка для S_2 получается при помощи такого же рассуждения, как при оценке $S_1^{(2)}$.

Поступило
3 V 1950