

УДК 536.2.01

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ВЛИЯНИЯ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОГО ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ

**И.А. КОНЦЕВОЙ**

(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)

*Изучены собственные колебания температуры и теплового потока в образце материала с отчетливо выраженными локально-неравновесными тепловыми свойствами для трех вариантов граничных условий, определяющих тип теплового резонатора. Начальный перепад температур между границами образца оказывает значительное влияние на всплески температуры и теплового потока. Рассмотрены основные факторы влияния: начальный температурный профиль, нелинейные теплофизические свойства материала, релаксация теплового потока. Количественные свойства колебаний зависят от параметра нелинейности. Параметр нелинейности среды в значительной степени влияет на амплитуды колебаний температуры и теплового потока в полуоткрытом и открытом резонаторе; в закрытом резонаторе влияние этого параметра выражено в меньшей степени.*

**Введение.** В настоящее время проблемы термической генерации звука в вязком теплопроводном газе изучены в разнообразных аспектах. Продолжаются исследования акустических резонаторов с учетом нелинейных эффектов (колебания большой амплитуды, физические свойства среды, механизм диссипации и др.) [1, 2]. В работе [3] дано теоретическое обоснование возможности создания нелинейного теплового резонатора. С физической точки зрения эта возможность обусловлена существованием материалов, обладающих достаточно большим временем тепловой релаксации. В качестве примера такого материала укажем высокотемпературную сверхпроводящую керамику [4]. В работах [5 – 7] изучены большие собственные колебания теплового резонатора и установлены следующие результаты:

- 1) неоднородное по координате начальное тепловое поле  $T^0(x)$  возбуждает нелинейные собственные колебания большой амплитуды. Их свойства обусловлены неравновесностью процесса и взаимодействием тепловых волн с границами образца;
- 2) толщина образца – один из основных факторов влияния на процесс. Для тонкой и толстой пластин имеем соответственно высокую и низкую частоты колебаний;
- 3) равновесный теплоперенос (модель Фурье) обладает классическим свойством: векторы  $\mathbf{q}$  и  $\text{grad } T$  направлены противоположно друг другу. В локально-неравновесных условиях может возникнуть неклассический вариант [1]:  $\mathbf{q}$  и  $\text{grad } T$  направлены одинаково;
- 4) три типа резонаторов (закрытый, полуоткрытый, открытый) различаются между собой структурой температурной неоднородности. В каждом сечении образца наблюдается чередование во времени классической ( $\mathbf{q} \cdot \text{grad } T < 0$ ) и неклассической ( $\mathbf{q} \cdot \text{grad } T > 0$ ) ситуаций.

Данная работа является продолжением этих исследований и имеет следующие цели: изучить влияние нелинейности среды (параметр  $n_1$ ), времени релаксации  $\gamma$  и начального теплового поля  $T^0(x)$  (параметр  $B$ ) на амплитуду свободных колебаний для каждого типа резонатора.

**Постановка и решение задачи.** Уравнение энергии и уравнение для теплового потока эволюционного (релаксационного) типа имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{q}{\gamma} + \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

$$u = \int_0^T c(T) dT; \quad V = \int_0^T \frac{\lambda(T)}{\gamma(T)} dT = \int_0^u w^2(u) du; \quad w^2 = \frac{\lambda}{c\gamma},$$

где  $x$  – декартова координата;  $t$  – время;  $T$  – температура;  $q$  – удельный тепловой поток;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – объемная теплоемкость;  $\gamma$  – время релаксации теплового потока;  $w$  – скорость распространения тепловых возмущений. Искомые функции:  $T(x, t)$ ,  $q(x, t)$ ,  $x \in [0, x_w]$ ,  $t \geq 0$ ;  $x_w$  – толщина слоя материала.

Современные методы исследования локально-неравновесной модели теплопереноса (1), (2) представлены в [3]; там же проведен подробный анализ возникновения градиентной катастрофы и свойств ударных тепловых волн. В соответствии с этими результатами присоединяем к левой части уравнения (1) слагаемое

$$\Psi \frac{\rho}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{u} \frac{\partial q}{\partial x} \right),$$

где  $\rho$  – плотность;  $\Psi$  – коэффициент искусственной диссипации. Этот коэффициент является аналогом газодинамического коэффициента искусственной вязкости и применяется для того, чтобы при численном решении сглаживать сильные разрывы, которые могут появляться в ходе эволюции теплового поля.

Собственные колебания большой амплитуды изучаем для трех типов резонаторов:

- закрытый резонатор:

$$q(x=0, t) = q_0, \quad q(x=x_w, t) = q_w; \quad (3)$$

допускается вариант, когда  $q_0 = q_w = 0$ ;

- полуоткрытый резонатор:

$$q(x=0, t) = q_0, \quad T(x=x_w, t) = T_w; \quad (4)$$

- открытый резонатор:

$$T(x=0, t) = T_0, \quad T(x=x_w, t) = T_w; \quad (5)$$

допускается вариант, когда  $T_0 = T_w$ . Здесь  $q_0$ ,  $q_w$ ,  $T_0$ ,  $T_w$  – постоянные величины. Для всех трех вариантов (3) – (5) начальные условия берем в виде:

$$T(x, t=0) = T^0(x), \quad q(x, t=0) = 0. \quad (6)$$

Ясно, что выбор  $T^0(x)$  определяет зависимость от координаты начальной скорости изменения теплового потока  $(dq/dt)_{t=0}$ .

Далее работаем с безразмерными величинами. При обезразмеривании применяем масштабы величин (они отмечены нижним индексом  $b$ ), которые обеспечивают инвариантность размерной и безразмерной форм записи уравнений и краевых условий:  $\lambda_b = x_b^2 c_b / t_b$ ,  $q_b = \lambda_b T_b / x_b$  и т.п. Решение краевых задач (1) – (6) выполняем численным методом интегральных соотношений А.А. Дородницына; применяем гиперболический вариант алгоритма построения расчетной схемы [8]. Подробное описание численного алгоритма и вопросы контроля точности расчетов изложены в [7].

**Результаты расчетов и их обсуждение.** Теплофизические свойства материала принимаем в виде:

$$\lambda(T) = \lambda_0 \exp(n_1 T); \quad c(T) = c_0 \exp(n_2 T); \quad \gamma \equiv \text{const},$$

где  $\lambda_0$ ,  $c_0$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  – константы.

При обработке результатов расчетов применяем следующие критерии:

- безразмерный тепловой поток  $Q = \frac{q x_w}{T_w^0 \lambda(T_w^0)}$ ;

- безразмерный градиент температуры  $g = \frac{x_w}{T_w^0} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ ;

- параметр энергии  $E \equiv \frac{c T}{\rho w^2} = \frac{c_p T}{w^2}$ ;

параметр неравновесности  $\Omega^{-2} = \frac{q^2}{u^2 w^2}$ ;

- параметр нелинейности среды  $D = \frac{T}{w^2} \frac{d(w^2)}{dT}$ ;

- амплитуда температуры  $A_T \equiv A_T(x_i, t) = \frac{T(x_i, t)}{T_w^0}$ ;

- амплитуда теплового потока  $A_q \equiv q(x_i, t)$ ;
- добротность  $K = \frac{1}{x_w} \left( \frac{\lambda \gamma}{c} \right)^{1/2}$ ;
- волновое сопротивление  $Z = \frac{1}{x_w} (\lambda c \gamma)^{1/2} = \frac{w c \gamma}{x_w}$ .

Здесь параметры  $K$  и  $Z$  являются тепловыми аналогами добротности и волнового сопротивления, применяемых для расчета электрических контуров и линий передач.

**Закрытый резонатор.** Начальный профиль температуры, монотонный по координате:

$$T^0(x) = 10 + B \cos(\pi x / x_w), \quad x \in [0, x_w], \quad (7)$$

где  $2B$  – начальный перепад температуры между левой и правой границами ( $B \equiv \text{const}$ ). Если  $B < 0$ , то  $dT^0/dx \geq 0$ ; если  $B > 0$ , то  $dT^0/dx \leq 0$ .

Влияние свойств среды было рассмотрено для различных комбинаций знаков производных  $d\lambda/dT$ ,  $dc/dT$ . Как и следовало ожидать, количественные свойства колебаний (параметры  $E$ ,  $\Omega^{-2}$ ,  $A_T$ ,  $A_q$ ) в значительной степени зависят от параметра нелинейности  $D$ , т.е. от вида функции  $w^2(T)$ . При этом хорошо выражено влияние показателя степени  $n_1$  функции  $\lambda(T)$ ; влияние показателя степени  $n_2$  функции  $c(T)$  менее существенно (далее принимаем  $c = \text{const}$ ). На рисунке 1 показаны на нескольких фазовых плоскостях характерные закономерности колебаний для  $x = x_1 = x_w/6$  при  $dT^0/dx > 0$  и  $n_1 < 0$ . При  $dT^0/dx \leq 0$  фазовые портреты проявляют себя аналогичным образом.

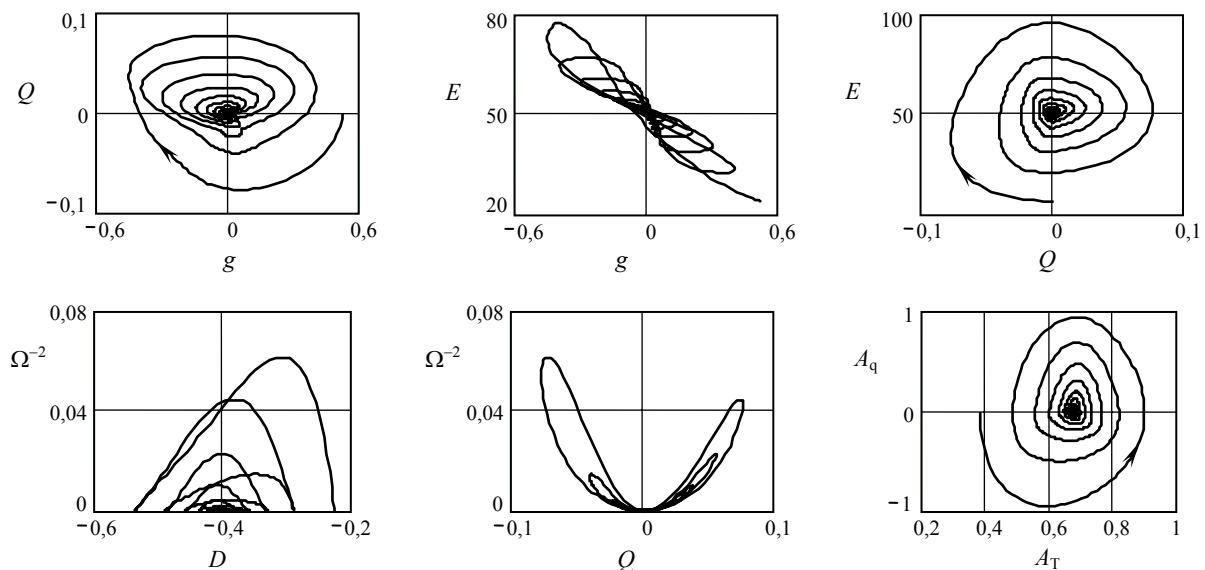


Рис. 1. Фазовые портреты свободных колебаний в закрытом тепловом резонаторе

Расчеты показывают, что в данном процессе в каждой фиксированной точке  $x$  при  $t \geq 0$  происходит чередование классической и неклассической ситуаций. На фазовой плоскости  $(g, Q)$  (см. рис. 1) имеем в I и III квадрантах  $Qg > 0$ , во II и IV –  $Qg < 0$ .

Отметим отличия во взаимосвязи энергии  $\gamma$  с тепловым потоком и градиентом температуры. На плоскости  $(Q, E)$  (см. рис. 1) типичным является устойчивый фокус. Стрелка указывает направление движения точки вдоль фазовой траектории с течением времени; это направление не зависит от знака параметра  $B$ . Зависимость  $E$  от  $g$  в фиксированной точке  $x$  имеет гистерезисный характер.

При  $T^0(x) = 10 - 5 \cos(\pi x / x_w)$  и для значений параметров среды  $c = 1$ ,  $n_1 = -0,04$ ,  $c = 1$ ,  $\gamma = 5$ , соответствующих вариантам расчета на рисунке 1, также имеем: волновое сопротивление  $Z$  – монотонно убывающая функция амплитуды температуры  $A_T$  (при  $n_1 > 0$  зависимость  $Z(A_T)$  монотонно возрастающая, при  $n_1 = 0$  –  $Z = \text{const}$ ). Зависимость  $\Omega^{-2}$  от  $D$  на каждом отдельном периоде колебаний не-

монотонная, имеет максимум, и этот максимум смещается с течением времени в сторону больших или меньших по модулю значений параметра нелинейности  $D$ . Связи  $Q$  и  $\Omega^{-2}$  присущи характерные петли динамического гистерезиса. На фазовой плоскости  $(A_T, A_q)$  имеем устойчивый фокус, причем каждый виток спирали соответствует периоду колебаний, как и на плоскостях  $(g, Q)$  и  $(Q, E)$ . Период колебаний слабо реагирует на изменение вида аналитических зависимостей  $\lambda(T)$ ,  $c(T)$ . Основное значение здесь имеют количественные характеристики теплофизических свойств  $\lambda(T_*)$ ,  $c(T_*)$ ,  $\gamma$ , где  $T_*$  – температура, которая устанавливается в образце при  $t \rightarrow \infty$ . От этих величин зависит и число периодов, в течение которых происходит затухание колебаний.

Влияние волнового механизма теплопереноса наиболее выразительно проявляется в свойствах температуры  $T_0(t)$  и  $T_w(t)$  на левой ( $x = 0$ ) и правой ( $x = x_w$ ) теплоизолированных границах соответственно, а также теплового потока  $q_3(t)$  в точке  $x = x_3 = x_w/2$  – середина образца (рис. 2).

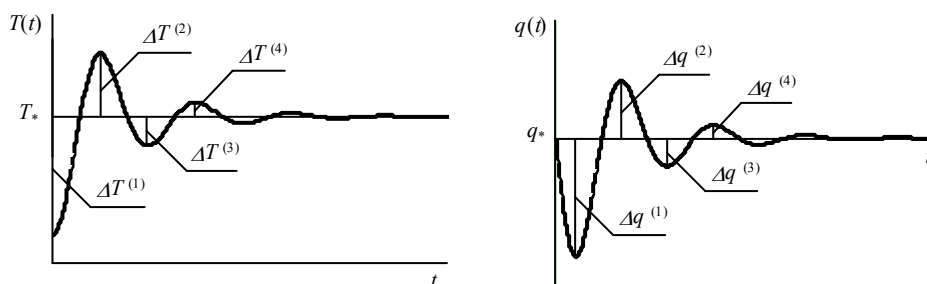


Рис. 2. Свободные колебания:  
отсчет отклонений температуры и теплового потока от асимптотических значений

В таблицах 1 – 3 даны сведения об амплитудах температуры и теплового потока для каждого из первых четырех полупериодов колебаний при  $dT^0(x)/dx \geq 0$ . Было принято  $T^0(x) = 10 + B \cos(\pi x/x_w)$ ,  $\lambda = \lambda_0 \exp(n_1 T)$  (причем  $\lambda(10) = 1$ ),  $\gamma = \text{const}$ ,  $c = 1$ . Указаны алгебраические величины  $\Delta T^{(1)}$ , ...,  $\Delta T^{(4)}$  и  $\Delta q^{(1)}$ , ...,  $\Delta q^{(4)}$  отклонений температуры и теплового потока от их асимптотических (при  $t \rightarrow \infty$ ) значений в фиксированной точке образца (см. рис. 2). Величина температуры, по отношению к которой вычисляются  $\Delta T$ , обозначается  $T_*$ ; во всех вариантах  $T_* \approx 10$ . Аналогично и для величин  $\Delta q$ ; во всех вариантах  $q_* = 0$ .

Таблица 1

Влияние параметра нелинейности среды на свойства амплитуд колебаний в закрытом резонаторе

$n_1$	$x = 0$				$x = x_w/2$			
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$
$dT^0(x)/dx \geq 0, B = -5, T^0(x) = 10 - 5 \cos(\pi x/x_w), c = 1, \gamma = 1$								
0,08	-5,00	3,16	-1,73	1,20	-3,97	2,37	-1,37	0,81
0,04	-5,00	3,09	-1,75	1,14	-3,97	2,38	-1,40	0,84
0	-5,00	3,03	-1,79	1,11	-3,98	2,40	-1,44	0,87
-0,04	-5,00	2,98	-1,85	1,12	-4,00	2,37	-1,41	0,83
-0,08	-5,00	2,94	-1,92	1,18	-4,02	2,31	-1,35	0,75
$dT^0(x)/dx \geq 0, B = -5, T^0(x) = 10 - 5 \cos(\pi x/x_w), c = 1, \gamma = 0,5$								
0,08	-5,00	2,58	-1,09	0,63	-5,18	2,49	-1,16	0,55
0,04	-5,00	2,50	-1,12	0,60	-5,17	2,49	-1,19	0,57
0	-5,00	2,44	-1,15	0,59	-5,19	2,50	-1,21	0,58
-0,04	-5,00	2,38	-1,18	0,59	-5,21	2,49	-1,19	0,57
-0,08	-5,00	2,33	-1,24	0,62	-5,24	2,45	-1,15	0,52

Из таблицы 1 видим: для фиксированной величины  $\gamma$  при  $n_1 > 0$  величина амплитуды температуры  $\Delta T^{(2)}$  немного больше, а  $\Delta T^{(3)}$  немного меньше соответствующих значений линейного варианта, когда  $n_1 = 0$ . Это объясняется тем, что при  $n_1 > 0$  коэффициент теплопроводности  $\lambda(T)$  – монотонно возрастающая функция и, следовательно, при более высоких температурах происходит лучшая передача тепла. При  $n_1 < 0$  получаем противоположный результат – зависимость  $\lambda(T)$  монотонно убывает и, следовательно, величина амплитуды температуры  $\Delta T^{(2)}$  немного меньше, а  $\Delta T^{(3)}$  немного больше соответ-

ствующих значений линейного варианта. Так, согласно таблице 2, для  $B = -9$  имеем: при  $n_1 = -0,04$  –  $\Delta T^{(2)} = 5,31$ ; при  $n_1 = 0$  –  $\Delta T^{(2)} = 5,46$ ; при  $n_1 = 0,04$  –  $\Delta T^{(2)} = 5,65$ . Амплитуды теплового потока слабо реагируют на знак и величину параметра  $n_1$ , но в значительной степени зависят от величины  $B$ . Таким образом, при больших по модулю величинах  $B$  получаем: колебания теплового потока, как и колебания температуры, происходят в более широком интервале (см. табл. 2); в большей степени выражено влияние параметра  $n_1$ ; в образце дольше устанавливается температура  $T_*$  и тепловой поток  $q_*$ .

Считаем, что процесс затухания колебаний закончен, когда в фиксированной точке  $x_i$  выполнены неравенства  $|\Delta T| \leq 10^{-2} |\Delta T|_{\max}$ ,  $|\Delta q| \leq 10^{-2} |\Delta q|_{\max}$ , где индекс  $\max$  относится к наибольшему по модулю достигаемому в задаче значению. Длительность полного затухания, когда в образце устанавливается постоянная температура  $T_*$  и постоянный тепловой поток  $q_*$ , обозначим  $t_\infty$ ; тогда  $n_\infty$  – соответствующее число полупериодов колебаний. Фазовую частоту колебаний температуры и теплового потока обозначим  $\nu$ .

Таблица 2

Влияние начального перепада температуры между левой и правой границами на свойства амплитуд колебаний в закрытом резонаторе

$B$	$x = 0$				$x = x_w / 2$			
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$
	$dT^0(x)/dx \geq 0$ , $T^0(x) = 10 + B \cos(\pi x/x_w)$ , $c = 1$ , $\gamma = 1$ , $n_1 = -0,04$							
-1	-1,00	0,60	-0,36	0,22	-0,80	0,48	-0,29	0,17
-3	-3,00	1,80	-1,09	0,67	-2,40	1,43	-0,86	0,51
-5	-5,00	2,98	-1,85	1,12	-4,00	2,37	-1,41	0,83
-7	-7,00	4,15	-2,62	1,59	-5,61	3,28	-1,94	1,11
-9	-9,00	5,31	-3,42	2,10	-7,23	4,18	-2,45	1,37
	$dT^0(x)/dx \geq 0$ , $T^0(x) = 10 + B \cos(\pi x/x_w)$ , $c = 1$ , $\gamma = 1$ , $n_1 = 0$							
-1	-1,00	0,61	-0,36	0,22	-0,80	0,48	-0,29	0,17
-3	-3,00	1,82	-1,08	0,67	-2,39	1,44	-0,87	0,52
-5	-5,00	3,03	-1,79	1,11	-3,98	2,40	-1,44	0,87
-7	-7,00	4,24	-2,51	1,56	-5,58	3,36	-2,02	1,22
-9	-9,00	5,46	-3,23	2,00	-7,17	4,32	-2,60	1,56
	$dT^0(x)/dx \geq 0$ , $T^0(x) = 10 + B \cos(\pi x/x_w)$ , $c = 1$ , $\gamma = 1$ , $n_1 = 0,04$							
-1	-1,00	0,61	-0,36	0,22	-0,80	0,48	-0,29	0,17
-3	-3,00	1,84	-1,06	0,68	-2,39	1,44	-0,86	0,52
-5	-5,00	3,09	-1,75	1,14	-3,97	2,38	-1,40	0,84
-7	-7,00	4,37	-2,44	1,63	-5,55	3,31	-1,93	1,15
-9	-9,00	5,65	-3,13	2,12	-7,13	4,26	-2,45	1,43

Таблица 3

Влияние времени релаксации на свойства амплитуд колебаний в закрытом резонаторе

$\gamma$	$x = 0$				$x = x_w / 2$			
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$
	$dT^0(x)/dx \geq 0$ , $B = -5$ , $T^0(x) = 10 - 5 \cos(\pi x/x_w)$ , $c = 1$ , $n_1 = -0,04$							
0,1	-5,00	0,81	-0,10	0,05	-8,67	1,37	-0,21	0,03
0,2	-5,00	1,49	-0,44	0,17	-7,10	2,12	-0,63	0,19
0,5	-5,00	2,38	-1,18	0,59	-5,21	2,49	-1,19	0,57
1	-5,00	2,98	-1,85	1,12	-4,00	2,37	-1,41	0,83
2	-5,00	3,49	-2,49	1,76	-3,01	2,06	-1,43	0,97
5	-5,00	4,01	-3,22	2,65	-2,02	1,57	-1,23	0,94
10	-5,00	4,30	-3,66	3,26	-1,47	1,22	-1,02	0,82
	$dT^0(x)/dx \geq 0$ , $B = -5$ , $T^0(x) = 10 - 5 \cos(\pi x/x_w)$ , $c = 1$ , $n_1 = 0,04$							
0,1	-5,00	0,85	-0,11	0,04	-8,61	1,36	-0,22	0,03
0,2	-5,00	1,58	-0,43	0,16	-7,05	2,12	-0,63	0,19
0,5	-5,00	2,50	-1,12	0,60	-5,17	2,49	-1,19	0,57
1	-5,00	3,09	-1,75	1,14	-3,97	2,38	-1,40	0,84
2	-5,00	3,57	-2,40	1,77	-2,99	2,07	-1,41	0,98
5	-5,00	4,04	-3,17	2,60	-2,00	1,58	-1,22	0,95
10	-5,00	4,29	-3,64	3,14	-1,46	1,23	-1,00	0,83

Из таблицы 3 видим: для  $n_1 = -0,04$  при  $\gamma = 0,1$  получаем отношение  $\Delta T^{(3)} / \Delta T^{(1)} = 0,02$ ; при  $\gamma = 10$  –  $\Delta T^{(3)} / \Delta T^{(1)} = 0,732$ . Из этого следует, что при увеличении  $\gamma$  для полного затухания требуется большее число периодов. При  $\gamma = 0,1$  числовые расчеты дают  $n_\infty = 4$ ,  $t_\infty = 1,115$ ,  $\nu = 8,566$ ; при  $\gamma = 10$  –  $n_\infty = 30$ ,  $t_\infty = 90,1$ ,  $\nu = 0,495$ . При  $n_1 = 0,04$  – результат аналогичный (например, при  $\gamma = 10$  –  $n_\infty = 31$ ,  $t_\infty = 95,8$ ,  $\nu = 0,495$ ). Таким образом, при увеличении величины  $\gamma$  уменьшается фазовая частота  $\nu$ , увеличиваются время  $t_\infty$  и число полупериодов  $n_\infty$ . Параметр  $B$  оказывает влияние на величины  $t_\infty$  и  $n_\infty$  и не влияет на величину  $\nu$ . Параметр  $n_1$  оказывает незначительное влияние на  $t_\infty$  и  $n_\infty$  и не влияет на  $\nu$ .

**Полуоткрытый резонатор.** Начальный профиль температуры монотонный по координате:

$$T^0(x) = T_w + B \cos(\pi x / 2x_w), \quad x \in [0, x_w], \quad (8)$$

где  $B \equiv \text{const}$  – начальный перепад температуры между левой и правой границами. Если  $B < 0$ , то  $dT^0/dx \geq 0$ ; если  $B > 0$ , то  $dT^0/dx \leq 0$ . Колебания температуры происходят относительно величины  $T_* = T_w$ , колебания теплового потока – относительно  $q_* = q_0 = 0$ .

В фазовых плоскостях зависимости между основными критериями следующие. Волновое сопротивление  $Z(A_T)$  – монотонно убывающая функция амплитуды температуры. В каждой фиксированной точке  $x = x_i$  при  $t \geq 0$  происходит, как и в закрытом резонаторе, чередование классической и неклассической ситуаций (на фазовой плоскости  $(g, Q)$  в I и III квадрантах  $Qg > 0$ , во II и IV  $Qg < 0$ ). Зависимость  $\Omega^{-2}$  от  $D$  на каждом отдельном периоде колебаний немонотонная. Характерные петли динамического гистерезиса присущи связи  $Q$  и  $\Omega^{-2}$ . Устойчивые фокусы на плоскостях  $(A_T, A_q)$  и  $(Q, E)$  типичны для изучаемых колебаний. Зависимость  $E$  от  $g$  в фиксированной точке  $x$  проявляет незначительно выраженный динамический гистерезис – монотонно убывающая. Период и частота колебаний, как и в закрытом резонаторе, определяются количественными характеристиками теплофизических свойств  $\lambda(T_*)$ ,  $c(T_*)$ ,  $\gamma$ .

Влияние волнового механизма теплопереноса наиболее выразительно проявляется в свойствах температуры  $T_0(t)$  на левой теплоизолированной границе образца, а также теплового потока  $q_w(t)$  – на правой изотермической границе. В таблицах 4 – 6 даны сведения об амплитудах температуры и теплового потока для каждого из первых четырех полупериодов колебаний. Было принято  $T^0(x) = 10 + B \cos(\pi x / 2x_w)$ ,  $\lambda = \lambda_0 \exp(n_1 T)$  (причем  $\lambda(10) = 1$ ),  $\gamma = \text{const}$ ,  $c = 1$ .

Таблица 4

Влияние параметра нелинейности среды на свойства амплитуд колебаний в полуоткрытом резонаторе

$n_1$	$x = 0$				$x = x_w$			
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$dT^0(x)/dx \geq 0$ , $T_w = 10$ , $B = -9$ , $T^0(x) = 10 - 9 \cos(\pi x / 2x_w)$ , $c = 1$ , $\gamma = 5$							
0,08	-9,00	4,39	-3,28	1,90	-2,72	1,76	-1,10	0,72
0,04	-9,00	4,97	-3,45	2,08	-2,95	1,92	-1,19	0,77
0	-9,00	5,73	-3,65	2,32	-3,28	2,09	-1,33	0,85
-0,04	-9,00	6,74	-3,85	2,62	-3,66	2,26	-1,47	0,92
-0,08	-9,00	8,11	-4,01	2,93	-4,09	2,43	-1,60	0,97
	$dT^0(x)/dx \geq 0$ , $T_w = 10$ , $B = -9$ , $T^0(x) = 10 - 9 \cos(\pi x / 2x_w)$ , $c = 1$ , $\gamma = 1$							
0,08	-9,00	2,41	-0,94	0,33	4,72	1,67	0,58	0,21
0,04	-9,00	2,74	-1,02	0,35	5,28	1,87	0,65	0,23
0	-9,00	3,14	-1,09	0,38	5,93	2,06	0,72	0,25
-0,04	-9,00	3,65	-1,19	0,42	6,69	2,28	0,80	0,28
-0,08	-9,00	4,30	-1,30	0,46	7,60	2,48	0,88	0,31
	$dT^0(x)/dx \leq 0$ , $T_w = 10$ , $B = 9$ , $T^0(x) = 10 + 9 \cos(\pi x / 2x_w)$ , $c = 1$ , $\gamma = 5$							
0,08	9,00	-8,10	4,01	-2,94	4,07	-2,42	1,59	-0,99
0,04	9,00	-6,74	3,85	-2,62	3,65	-2,26	1,47	-0,92
0	9,00	-5,72	3,64	-2,31	3,27	-2,08	1,33	-0,84
-0,04	9,00	-4,97	3,45	-2,08	2,95	-1,92	1,19	-0,77
-0,08	9,00	-4,38	3,28	-1,90	2,71	-1,76	1,10	-0,72

Продолжение таблицы 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$dT^0(x)/dx \leq 0, T_w = 10, B = 9, T^0(x) = 10 + 9\cos(\pi x/2x_w), c = 1, \gamma = 1$								
0,08	9,00	-4,29	1,29	-0,46	7,55	-2,49	0,88	-0,30
0,04	9,00	-3,65	1,19	-0,42	6,69	-2,28	0,80	-0,28
0	9,00	-3,13	1,09	-0,38	5,91	-2,05	0,71	-0,25
-0,04	9,00	-2,74	1,02	-0,35	5,26	-1,87	0,65	-0,23
-0,08	9,00	-2,41	0,94	-0,33	4,71	-1,67	0,58	-0,21

Таблица 5

Влияние начального перепада температуры между левой и правой границами на свойства амплитуд колебаний в полукрытом резонаторе

$B$	$x = 0$				$x = x_w$			
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$
$dT^0(x)/dx \geq 0, T_w = 10, T^0(x) = 10 - B\cos(\pi x/2x_w), c = 1, \gamma = 5, n_1 = -0,04$								
-1	-1,00	0,65	-0,41	0,26	-0,37	0,23	-0,15	0,10
-3	-3,00	2,01	-1,24	0,81	-1,13	0,72	-0,46	0,29
-5	-5,00	3,48	-2,09	1,38	-1,93	1,214	-0,78	0,49
-7	-7,00	5,05	-2,96	1,98	-2,77	1,728	-1,12	0,71
-9	-9,00	6,74	-3,85	2,62	-3,65	2,26	-1,47	0,92
$dT^0(x)/dx \geq 0, T_w = 10, T^0(x) = 10 - B\cos(\pi x/2x_w), c = 1, \gamma = 5, n_1 = 0,04$								
-1	-1,00	0,63	-0,40	0,25	-0,36	0,23	-0,15	0,09
-3	-3,00	1,81	-1,19	0,74	-1,05	0,67	-0,43	0,27
-5	-5,00	2,93	-1,96	1,21	-1,72	1,10	-0,70	0,45
-7	-7,00	3,98	-2,72	1,66	-2,35	1,51	-0,95	0,61
-9	-9,00	4,97	-3,45	2,08	-2,95	1,92	-1,19	0,77

Таблица 6

Влияние времени релаксации на свойства амплитуд колебаний в полукрытом резонаторе

$\gamma$	$x = 0$				$x = x_w$			
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$
$dT^0(x)/dx \geq 0, T_w = 10, B = -9, T^0(x) = 10 - 9\cos(\pi x/2x_w), c = 1, n_1 = -0,04$								
0,5	-9,00	2,16	-0,41	0,08	-8,29	1,71	-0,35	0,07
1	-9,00	3,65	-1,19	0,42	-6,69	2,28	-0,80	0,28
2	-9,00	5,08	-2,27	1,14	-5,24	2,46	-1,22	0,58
5	-9,00	6,74	-3,85	2,67	-3,65	2,26	-1,47	0,92
10	-9,00	7,76	-4,96	3,96	-2,72	1,93	-1,43	1,03
$dT^0(x)/dx \geq 0, T_w = 10, B = -9, T^0(x) = 10 - 9\cos(\pi x/2x_w), c = 1, n_1 = 0,04$								
0,5	-9,00	1,61	-0,35	0,07	-6,48	1,32	-0,28	0,06
1	-9,00	2,74	-1,02	0,35	-5,28	1,87	-0,65	0,23
2	-9,00	3,80	-1,97	0,93	-4,17	2,07	-0,98	0,48
5	-9,00	4,97	-3,45	2,08	-2,95	1,92	-1,19	0,77
10	-9,00	5,66	-4,55	3,07	-2,22	1,65	-1,17	0,86

Пусть  $l$  и  $L$  есть соответственно точная нижняя и точная верхняя границы значений начальной температуры  $T^0(x)$ ,  $x \in [0, x_w]$ . В ходе волнового процесса возможна одна из ситуаций:

1) происходит всплеск нагрева,  $T/L > 1$  (при  $dT^0(x)/dx \geq 0$ ); температура импульсивно повышается до значений, превышающих верхнюю границу  $L$ ; отношение  $T/L$  тем больше, чем меньше параметр  $n_1$ ;

2) происходит всплеск охлаждения,  $T/L < 1$ ; температура становится меньше нижней границы  $l$  (если  $dT^0(x)/dx \leq 0$ ); отношение  $T/l$  тем меньше, чем больше параметр  $n_1$ .

Согласно таблице 4 имеем:

- при  $dT^0(x)/dx \geq 0$ ,  $B = -9$ ,  $\gamma = 5$ ,  $n_1 = -0,08$  в отдельные моменты времени  $T/L = 1,811$ ;
- при  $dT^0(x)/dx \leq 0$ ,  $B = 9$ ,  $\gamma = 5$ ,  $n_1 = 0,08$  –  $T/l = 0,19$ .

Таким образом, взаимодействие тепловых волн с границами области приводит к значительному размаху колебаний температуры на границах области. При этом параметр  $n_1$  оказывает существенное влияние и на амплитуду температуры, и на амплитуду теплового потока, в отличие от закрытого резонатора.

Начальный перепад температуры  $B$  между границами образца и время релаксации  $\gamma$  также влияют на амплитуды температуры и теплового потока: чем больше величины  $B$  и  $\gamma$ , тем в более широких интервалах происходят колебания температуры и теплового потока (см. табл. 5 – 6). При увеличении  $B$  и  $\gamma$  увеличивается время  $t_\infty$  затухания колебаний и число полупериодов  $n_\infty$  на интервале  $[0, t_\infty]$ . Частота и период колебаний теплового поля определяются величиной  $\gamma$ , а от параметра  $B$  не зависят. Так, при  $B = -1$  и  $\gamma = 5$  получаем  $\nu = 0,696$ ,  $n_\infty = 7$ ,  $t_\infty = 24,22$ ; при  $B = -9$  и  $\gamma = 5$  –  $\nu = 0,696$ ,  $n_\infty = 12$ ,  $t_\infty = 46,83$ ; при  $B = -9$  и  $\gamma = 10$  –  $\nu = 0,494$ ,  $n_\infty = 16$ ,  $t_\infty = 93,8$ . Таким образом, при увеличении  $\gamma$  уменьшается  $\nu$  (период колебаний увеличивается), увеличиваются  $n_\infty$  и  $t_\infty$ ; при увеличении  $B$   $n_\infty$  и  $t_\infty$  также увеличиваются. Необходимо отметить, что при любых фиксированных значениях  $\lambda(T_*)$ ,  $c$  и  $\gamma$  для закрытого и полуоткрытого резонатора частота  $\nu$  колебаний теплового поля – одна и та же величина.

**Открытый резонатор.** Начальный профиль температуры немонотонный по координате:

$$T^0(x) = T_w + B \sin(\pi x / x_w), \quad x \in [0, x_w], \quad (8)$$

где  $B \equiv \text{const}$  – начальный перепад температуры между серединой образца и его левой (правой) границей. Если  $B > 0$ , то  $T_3^0 = T_{\max}^0$ ; при  $B < 0$  получаем  $T_3^0 = T_{\min}^0$ .

В фазовых плоскостях имеем следующие зависимости. Волновое сопротивление  $Z(A_T)$  – монотонно убывающая функция амплитуды температуры. Устойчивые фокусы на плоскостях  $(g, Q)$ ,  $(A_T, A_q)$  и  $(Q, E)$  типичны для изучаемых колебаний. При  $t \geq 0$  происходит чередование классической и неклассической ситуаций (как и для ранее рассмотренных резонаторов, на фазовой плоскости  $(g, Q)$  в I и III квадрантах  $Qg > 0$ , во II и IV  $Qg < 0$ ). Зависимость  $E(g)$  близка к линейной, монотонно возрастающая. Петли динамического гистерезиса присущи связи  $\Omega^{-2}(Q)$ . Зависимость  $\Omega^{-2}$  от  $D$  на каждом отдельном периоде колебаний немонотонная, имеет максимум.

Влияние волнового механизма теплопереноса наиболее выразительно проявляется в свойствах теплового потока  $q_0(t)$  и  $q_w(t)$  на левой и правой изотермических границах и температуры  $T_3(t)$  посередине образца. В таблицах 7 – 9 даны сведения об амплитудах температуры и теплового потока для  $dT^0(x)/dx \geq 0$ . Было принято  $T^0(x) = 10 + B \sin(\pi x / x_w)$ ,  $\lambda = \lambda_0 \exp(n_1 T)$  (причем  $\lambda(10) = 1$ ),  $c = 1$ ,  $\gamma = \text{const}$ .

Таблица 7

Влияние параметра нелинейности среды на свойства амплитуд колебаний в открытом резонаторе

$n_1$	$x = x_w/2$				$x = 0$			
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$
	$T^0(x_w/2) = T_{\min}^0$ , $T_0^0 = T_w^0 = 10$ , $B = -5$ , $T^0(x) = 10 - 5 \sin(\pi x / x_w)$ , $c = 1$ , $\gamma = 1$							
0,08	-5,00	2,55	-1,64	0,91	3,56	-2,26	1,24	-0,76
0,04	-5,00	2,75	-1,70	0,96	3,84	-2,37	1,31	-0,81
0	-5,00	3,01	-1,78	1,06	4,09	-2,50	1,43	-0,87
-0,04	-5,00	3,31	-1,86	1,13	4,29	-2,61	1,50	-0,92
-0,08	-5,00	3,60	-1,91	1,19	4,66	-2,83	1,59	-0,96
	$T^0(x_w/2) = T_{\min}^0$ , $T_0^0 = T_w^0 = 10$ , $B = -5$ , $T^0(x) = 10 - 5 \sin(\pi x / x_w)$ , $c = 1$ , $\gamma = 0,5$							
0,08	-5,00	2,04	-1,03	0,47	4,66	-2,29	1,02	-0,49
0,04	-5,00	2,19	-1,07	0,49	4,98	-2,44	1,08	-0,52
0	-5,00	2,40	-1,14	0,54	5,32	-2,59	1,19	-0,58
-0,04	-5,00	2,64	-1,20	0,57	5,61	-2,72	1,25	-0,61
-0,08	-5,00	2,86	-1,24	0,60	6,10	-2,94	1,33	-0,64



В открытом резонаторе возможно появление областей импульсного нагрева и охлаждения. Как и в полуоткрытом резонаторе, возможны варианты, когда  $T/L > 1$  и  $T/L < 1$ . В случае  $B < 0$  происходит всплеск нагрева, а при  $B > 0$  – всплеск охлаждения. При этом параметр  $n_1$ , как и в полуоткрытом резонаторе, оказывает существенное влияние на амплитуды температуры и теплового потока. Согласно таблице 7 имеем при  $\gamma = 1$ ,  $n_1 = -0,04$  в отдельные моменты времени  $T/L = 1,636$ .

Параметр  $B$  также влияет на амплитуды температуры и теплового потока: чем больше  $B$ , тем в более широких интервалах происходят колебания температуры и теплового потока (см. табл. 8). При увеличении  $B$  увеличивается время  $t_\infty$  затухания колебаний и число полупериодов  $n_\infty$  на интервале  $[0, t_\infty]$ .

Таблица 8

Влияние начального перепада температуры между левой и правой границами на свойства амплитуд колебаний в открытом резонаторе

$B$	$x = x_w/2$				$x = 0$			
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$
	$T^0(x_w/2) = T_{\min}^0$ , $T_0^0 = T_w^0 = 10$ , $T^0(x) = 10 + B \sin(\pi x/x_w)$ , $c = 1$ , $\gamma = 1$ , $n_1 = -0,04$							
-1	-1,00	0,61	-0,36	0,21	0,83	-0,51	0,29	-0,17
-3	-3,00	1,91	-1,10	0,66	2,53	-1,54	0,89	-0,54
-5	-5,00	3,31	-1,86	1,13	4,29	-2,61	1,50	-0,92
-7	-7,00	4,80	-2,64	1,63	6,22	-3,78	2,17	-1,32
-9	-9,00	6,36	-3,41	2,11	8,28	-5,02	2,83	-1,72
	$T^0(x_w/2) = T_{\min}^0$ , $T_0^0 = T_w^0 = 10$ , $T^0(x) = 10 + B \sin(\pi x/x_w)$ , $c = 1$ , $\gamma = 1$ , $n_1 = 0,04$							
-1	-1,00	0,59	-0,35	0,20	0,81	-0,50	0,27	-0,17
-3	-3,00	1,70	-1,03	0,59	2,36	-1,46	0,81	-0,49
-5	-5,00	2,75	-1,70	0,96	3,84	-2,37	1,31	-0,81
-7	-7,00	3,73	-2,35	1,32	5,23	-3,23	1,80	-1,10
-9	-9,00	4,65	-2,98	1,67	6,55	-4,05	2,26	-1,38

Таблица 9

Влияние времени релаксации на свойства амплитуд колебаний в открытом резонаторе

$\gamma$	$x = x_w/2$				$x = 0$			
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$
	$T^0(x_w/2) = T_{\min}^0$ , $T_0^0 = T_w^0 = 10$ , $B = -5$ , $T^0(x) = 10 - 5 \sin(\pi x/x_w)$ , $c = 1$ , $n_1 = -0,04$							
0,1	-5,00	0,84	-0,12	0,02	9,41	-1,51	0,22	-0,03
0,2	-5,00	1,63	-0,46	0,13	7,68	-2,32	0,66	-0,19
0,5	-5,00	2,63	-1,20	0,57	5,66	-2,76	1,26	-0,61
1	-5,00	3,31	-1,86	1,13	4,29	-2,61	1,50	-0,92
2	-5,00	3,87	-2,51	1,80	3,22	-2,29	1,53	-1,09
5	-5,00	4,41	-3,23	2,71	2,15	-1,73	1,34	-1,09
10	-5,00	4,76	-3,70	3,34	1,56	-1,37	1,11	-0,97
	$T^0(x_w/2) = T_{\min}^0$ , $T_0^0 = T_w^0 = 10$ , $B = -5$ , $T^0(x) = 10 - 5 \sin(\pi x/x_w)$ , $c = 1$ , $n_1 = 0,04$							
0,1	-5,00	0,66	-0,10	0,01	8,21	-1,20	0,18	-0,02
0,2	-5,00	1,33	-0,39	0,11	6,76	-2,00	0,54	-0,15
0,5	-5,00	2,19	-1,07	0,49	4,98	-2,44	1,08	-0,52
1	-5,00	2,75	-1,70	0,96	3,84	-2,37	1,31	-0,81
2	-5,00	3,21	-2,33	1,53	2,89	-2,10	1,36	-0,98
5	-5,00	3,67	-3,09	2,30	1,94	-1,62	1,20	-0,99
10	-5,00	3,92	-3,56	2,81	1,42	-1,26	1,01	-0,89

Частота (период) колебаний теплового поля не зависит от параметров  $n_1$  и  $B$ , а определяется величиной  $\gamma$ : при увеличении  $\gamma$  уменьшается  $\nu$  (период колебаний увеличивается), увеличиваются  $t_\infty$  и  $n_\infty$ . При этом, если  $\gamma = 10$ , то  $\nu = 0,982$ . Таким образом, частота колебаний теплового поля, как и для двух ранее рассмотренных резонаторов, определяется величинами теплофизических свойств  $\lambda(T_*)$ ,  $c$ ,  $\gamma$ , но отличается от частоты колебаний закрытого (полуоткрытого) резонатора примерно в 2 раза.

**Закключение.** Изучено влияние начального температурного профиля, нелинейных теплофизических свойств материала, релаксации теплового потока на собственные колебания теплового поля в образце материала, обладающего локально-неравновесными тепловыми свойствами. Рассмотрены три типа резонаторов (закрытый, полукоткрытый, открытый), различающиеся между собой структурой температурной неоднородности.

Параметр нелинейности среды  $n_1$  в значительной степени влияет на амплитуды  $\Delta T^{(i)}$  и  $\Delta q^{(i)}$  колебаний температуры и теплового потока в полукоткрытом и открытом резонаторе. При этом в случае  $dT^0(x)/dx \geq 0$  на интервале  $x \in [0, x_w/2]$  (когда в образце в начальный момент происходит импульсный нагрев) чем больше параметр  $n_1$ , тем меньше величины  $\Delta T^{(i)}$  и  $\Delta q^{(i)}$ . В случае  $dT^0(x)/dx \leq 0$ ,  $x \in [0, x_w/2]$  – противоположный результат: при увеличении  $n_1$  величины  $\Delta T^{(i)}$ ,  $\Delta q^{(i)}$  увеличиваются. В закрытом резонаторе влияние параметра  $n_1$  выражено в меньшей степени. При этом с увеличением величины  $n_1$  имеем: если  $dT^0(x)/dx \geq 0$ , то амплитуды  $\Delta T^{(i)}$  становятся больше; если  $dT^0(x)/dx \leq 0$ , то амплитуды  $\Delta T^{(i)}$  становятся меньше; на величины  $\Delta q^{(i)}$  параметр  $n_1$  существенно не влияет.

Начальный перепад температур между границами образца оказывает значительное влияние на всплески температуры и теплового потока. Чем больше величина  $B$ , тем в более широких интервалах происходят колебания температуры и теплового потока, тем больше величины  $\Delta T^{(i)}$  и  $\Delta q^{(i)}$ . При этом в полукоткрытом и открытом резонаторах возможны случаи, когда температура в фиксированной точке  $x = x_i$  становится значительно выше (ниже) величины  $T_{\max}^0$  ( $T_{\min}^0$ ).

С увеличением времени релаксации  $\gamma$  величины амплитуд  $\Delta T^{(i)}$ ,  $\Delta q^{(i)}$  увеличиваются, а также уменьшается частота  $\nu$  колебаний теплового поля в каждом из резонаторов. Частота и период колебаний определяются величинами теплофизических свойств  $\lambda(T_*)$ ,  $c(T_*)$ ,  $\gamma$  и не зависят от параметров  $n_1$  и  $B$ . При фиксированных значениях  $\lambda(T_*)$ ,  $c(T_*)$ ,  $\gamma$  величины  $\nu$  в открытом и закрытом (полукоткрытом) резонаторах отличаются примерно в 2 раза.

Работа выполнена под научным руководством профессора О.Н. Шабловского.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галиуллин, Р.Г. Резонансные колебания газа в закрытой трубе в области перехода к ударным волнам / Р.Г. Галиуллин [и др.] // ИФЖ. – 2000. – Т. 73, № 2. – С. 370 – 375.
2. Руденко, О.В. Рост энергии и добротности нелинейного резонатора с усилением его потерь / О.В. Руденко [и др.] // ДАН. – 2002. – Т. 383, № 3. – С. 330 – 333.
3. Шабловский, О.Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах / О.Н. Шабловский. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2003. – 382 с.
4. Voronel, A.V. Heat capacity and equilibration time near  $T_c$  of  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  / A.V. Voronel [etc.] // Physica C153-155. – 1988. – P. 1086 – 1088.
5. Shablovsky, O.N. Free oscillations of large amplitude in a heat resonator / O.N. Shablovsky, I.A. Kontsevoy // Physics of Shock Waves, Combustion, Detonation and Non-Equilibrium Processes. Minsk, 2005. – P. 157 – 158.
6. Шабловский, О.Н. Нелинейные собственные колебания локально-неравновесного теплового поля / О.Н. Шабловский, И.А. Концевой // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. Т. 2. – С. 379 – 382.
7. Шабловский, О.Н. Большие собственные колебания теплового резонатора / О.Н. Шабловский, И.А. Концевой // Материалы, технологии, инструменты. – 2006. – Т. 11, № 2. – С. 9 – 14.
8. Коробейников, В.П. Задачи теории точечного взрыва / В.П. Коробейников. – М.: Наука, 1985. – 400 с.

Поступила 18.01.2007