

УДК 536.2.01

РЕЗОНАНСНЫЕ И ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ИМПУЛЬСНО-ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ТЕПЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОЙ СРЕДЕ

И.А. КОНЦЕВОЙ

(Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого)

Представлены результаты теоретического исследования вынужденных тепловых колебаний в системе «локально-неравновесная среда – поверхностный источник энергии». Подробно изучены резонансные и гистерезисные свойства системы. Для теплового резонатора существенными факторами влияния на поведение резонансной кривой являются длительность паузы между импульсами излучения и толщина образца. Показано, что площадь петли частотного гистерезиса на плоскости «частота – добротность» обладает сильной чувствительностью по таким параметрам, как: толщина образца; величина отклонения частоты от ее стационарного значения; длительность всплеска частоты, причем чем меньше эта длительность, тем резче выражен гистерезис.

Введение. Проблемы термической генерации нелинейных колебаний в материалах представляют значительный интерес для физики волн и ее приложений. В настоящее время накоплен большой опыт исследований акустических резонаторов (см. работу [1] и приведенную в ней библиографию). В условиях хорошо выраженной тепловой неравновесности некоторые сверхпроводники могут служить основой теплового резонатора [2]: при слабом источнике тепловых возмущений в нем происходит формирование нелинейных структур. В работах [3; 4] изучены собственные колебания большой амплитуды в тепловых резонаторах трех типов: открытом, полукрытом и закрытом. В работах [5; 6] подробно изучены резонансные свойства вынужденных тепловых колебаний в системе «локально-неравновесная среда – поверхностный источник энергии». Выявлены закономерности поведения динамического теплового гистерезиса в условиях сильной физической нелинейности процесса. Расчеты проведены для высокотемпературной сверхпроводящей керамики $Y_{0,8} - Sm_{0,2} - Ba_2 - Cu_3 - O_{7-x}$ на основе иттрия.

В данной работе изучаются вынужденные колебания полукрытого теплового резонатора. Цель – исследовать влияние параметров теплового воздействия на резонансные и гистерезисные явления.

Постановка и решение задачи. Релаксационная модель Максвелла переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения для теплового потока и уравнения баланса энергии [7]:

$$\frac{q}{\gamma} + \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$u = \int_0^T c(T) dT, \quad V = \int_0^T \frac{\lambda(T)}{\gamma(T)} dT = \int_0^u w^2(u) du; \quad w^2 = \frac{\lambda}{c\gamma},$$

где x – декартова координата; t – время; T – температура; q – удельный тепловой поток; λ – коэффициент теплопроводности; c – объемная теплоемкость; γ – время релаксации теплового потока; w – скорость распространения тепловых возмущений. Искомые функции: $T(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in [0, h]$, $t \geq 0$; h – толщина слоя материала.

Современные методы исследования локально-неравновесной модели теплопереноса (1), (2) представлены в [2], где проведен подробный анализ возникновения градиентной катастрофы и свойств ударных тепловых волн. В соответствии с этими результатами присоединяем к левой части уравнения (1) слагаемое

$$\Psi \frac{\rho}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial q}{\partial x} \right),$$

где ρ – плотность; Ψ – коэффициент искусственной диссипации. Этот коэффициент является аналогом газодинамического коэффициента искусственной вязкости и применяется для того, чтобы при численном решении сглаживать сильные разрывы, которые могут появляться в ходе эволюции теплового поля.

Граничные и начальные условия:

$$q(x=0, t) = q_0(t), \quad T(x=h, t) = T_w \equiv \text{const}; \quad (3)$$

$$q(x, t=0) = 0, \quad T(x, t=0) = T_w, \quad (4)$$

где $q_0(t)$ – плотность потока энергии, поглощенной поверхностью образца материала; T_w – температура правой стенки.

Для теплового потока на левой границе применяем два варианта.

1. Импульсно-периодическое тепловое воздействие с постоянной частотой колебаний:

$$q_0(t) = H \sin(pt/2)^{2m}; \quad p, H - \text{const}, \quad (5)$$

где $m \geq 1$ – целое число. Параметр m характеризует длительность паузы $t^{(m)}$ между импульсами лазерного излучения; при $m=1$ паузы отсутствуют: $t^{(1)} = 0$.

Добротность резонатора вычисляем по формуле:

$$K_1 = \frac{A_q}{H},$$

где A_q – амплитуда установившихся колебаний теплового потока $q_w(t) = q(x=h, t)$ на правой границе.

2. Частота возбуждения $p(t)$ – немонотонная функция времени:

$$q_0(t) = H \left(\sin \frac{P(t)}{2} \right)^2,$$

$$P(t) = p_\infty t + \frac{A_*}{A_1} \arctg A_1(t - t_*),$$

$$A_*, A_1, p_\infty, t_* - \text{const};$$

$$\frac{dP}{dt} \equiv p(t) = p_\infty + \frac{A_*}{1 + A_1^2(t - t_*)^2}, \quad (6)$$

$$t \geq 0, \quad 0 < t_* < \infty.$$

Функция $p(t)$ имеет всплеск при $t = t_*$: $p_* \equiv p(t_*) = p_\infty + A_*$. Ширина всплеска вдоль оси t зависит от параметра $A_1 > 0$: чем больше A_1 , тем меньше длительность всплеска. Знак параметра A_* характеризует направление изменения частоты; модуль $|A_*|$ дает величину отклонения частоты от ее стационарного значения p_∞ . Таким образом, формула (6) позволяет рассмотреть важный в практическом отношении частотный гистерезис, обусловленный направлением изменения частоты возбуждающих колебаний: «рост – убывание», «убывание – рост». Добротность определяем следующим образом:

$$K_2(t_j) = \frac{|A_q(t_j) - q^1|}{H}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

где $A_q(t_j)$ – экстремальное значение теплового потока, достигаемое в последовательные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$; q^1 – среднее положительное значение, около которого осциллирует тепловой поток.

Теплофизические свойства λ , c , γ принимаем постоянными и обращаем основное внимание на характер возбуждения колебаний. Вопрос о роли нелинейных свойств $\lambda(T)$, $c(T)$ изучен в [6]. Работаем с безразмерными величинами. Для размерных и безразмерных уравнений применяем одинаковую форму записи, полагая

$$\lambda \rightarrow \tilde{\lambda} \lambda'; \quad c \rightarrow \tilde{c} c'; \quad \gamma \rightarrow \gamma'; \quad T \rightarrow T'; \quad q \rightarrow q'; \quad x \rightarrow x'; \quad t \rightarrow t',$$

где штрихом отмечены безразмерные величины. Безразмерные комплексы $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_b T_b}{x_b q_b}$, $\tilde{c} = \frac{c_b T_b x_b}{t_b q_b}$ составлены из масштабов величин (отмечены индексом b), применяемых для обезразмеривания: $T = T' T_b$, $\gamma \rightarrow \gamma' t_b$ и т. д.

Величина $h = x_b$ – параметр резонатора. Образцу заданной толщины h свойственны критические частоты: собственные и резонансные. Первая собственная частота равна $\omega_1 = \pi w / h$, где $w = (\lambda / c\gamma)^{1/2} = w_b$ – характерная скорость тепловой волны для изучаемого материала. Масштаб времени $t_b = x_b / w_b$, тогда $\omega'_1 = \pi$. В дальнейшем штрих над безразмерными величинами опустим. Применяем только безразмерные функции безразмерных аргументов. На резонансной частоте $p_r = \omega_1 / 2 = \pi / 2$ период колебаний равен $\vartheta_r = 2\pi / p_r = 4$.

Были приняты следующие постоянные значения основных параметров:

1) модельный пример:

$$\gamma = 10 \text{ с}, \lambda_b = \lambda = 10 \text{ Вт/(м·К)}, c_b = c = 10^6 \text{ Дж/(м}^3\cdot\text{К)}; \quad (7)$$

$$T_b = 10^3 \text{ К}, q_b = 10^3 \text{ Вт/м}^2, w_b = \left(\frac{\lambda_b}{\gamma c_b} \right)^{1/2} = 10^{-3} \text{ м/с}, x_b = h;$$

2) высокотемпературная сверхпроводящая керамика $\text{Y}_{0,8} - \text{Sm}_{0,2} - \text{Ba}_2 - \text{Cu}_3 - \text{O}_{7-x}$ в температурном интервале $T, \text{ К} \in [7, 13]$. Числовые значения теплофизических параметров взяты из [9, 10]:

$$\gamma = 600 \text{ с}, \lambda_b = \lambda = 1,317 \text{ Вт/(м·К)}, c_b = c = 15278 \text{ Дж/(м}^3\cdot\text{К)}, \quad (8)$$

$$T_b = 10 \text{ К}; q_b = 1 \text{ Вт/м}^2, w_b = \left(\frac{\lambda_b}{\gamma c_b} \right)^{1/2} = 3,79 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}, x_b = h.$$

Решение краевой задачи (1) – (4) выполняем численным методом интегральных соотношений А.А. Дородницына; применяем гиперболический вариант алгоритма построения расчетной схемы [8]. Подробное описание численного алгоритма и вопросы контроля точности расчетов изложены в [4 – 6].

Результаты и их обсуждение

Постоянная частота возбуждающих колебаний. Первая серия расчетов имеет целью построение резонансных кривых на плоскости «частота возбуждения – добротность» при различных толщинах образца. На рисунке 1 даны резонансные кривые для модельного примера (7); на рисунке 2 – для керамики (8). Если пауз нет ($m = 1$), то наблюдается традиционный вариант, когда максимум добротности достигается при $p = p_r = \omega_1 / 2$ (рис. 1, а; рис. 2, а). Наличие пауз дает принципиальные изменения: при прочих равных условиях появляются одна либо две пары дополнительных резонансных частот (рис. 1, б; рис. 2, б). На рисунках 1 и 2 хорошо видна сильная чувствительность добротности K_1 к изменению толщины h . Это объясняется интенсивным взаимодействием тепловых волн с границами образца. Добротность на резонансной частоте $p_r = \omega_1 / 2$ не зависит от длительности паузы.

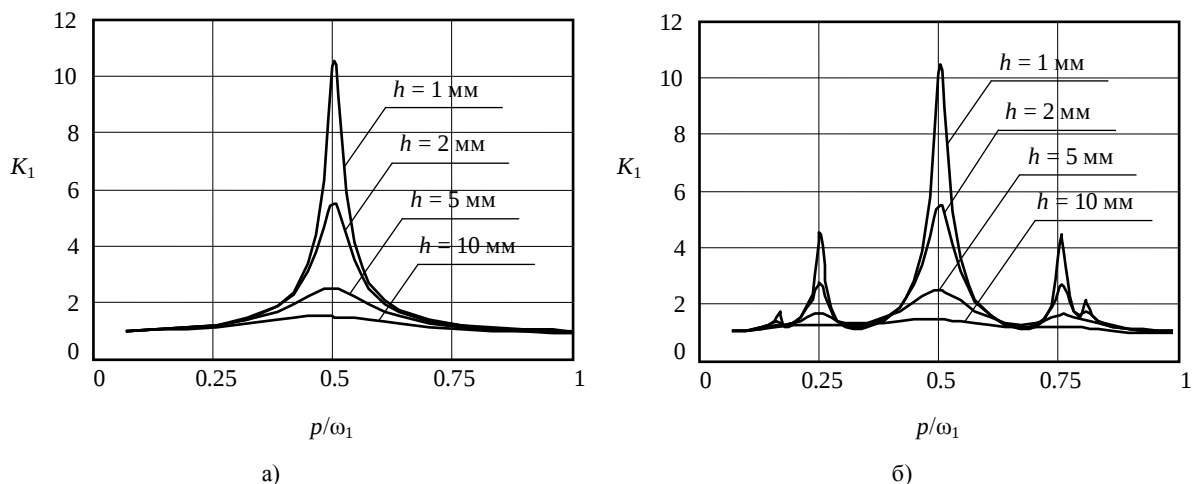


Рис. 1. Резонансные кривые полуоткрытого теплового резонатора (модельный пример):

а – без пауз ($m = 1$); б – с паузами ($m = 3$)

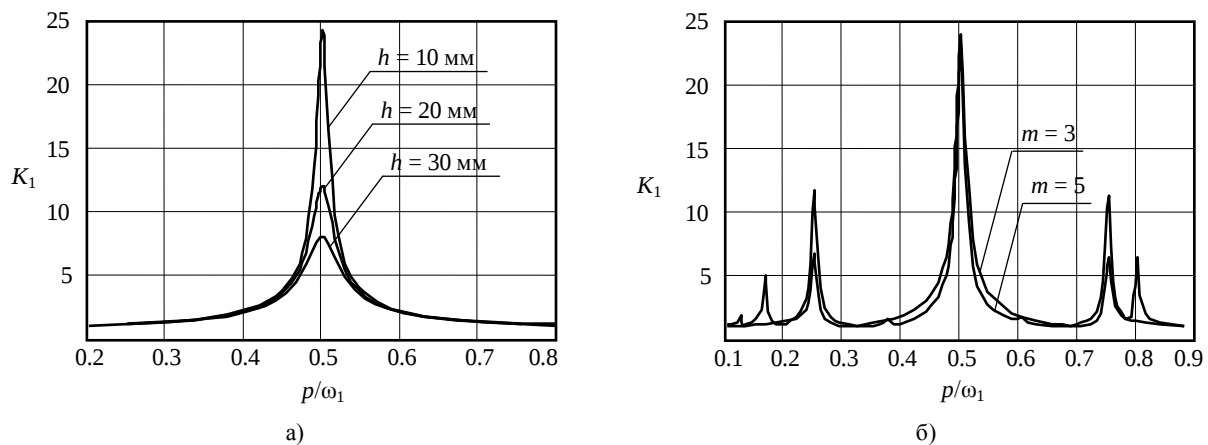


Рис. 2. Резонансные кривые полукрытого теплового резонатора для высокотемпературной сверхпроводящей керамики:
а – без пауз; б – с паузами при толщине $h = 10$ мм

Частотный гистерезис. Рассмотрим переменную частоту (6) возбуждающих колебаний. Изучим четыре варианта (рис. 3).

I. $p_* = p_r$, $p_\infty = p_r/2$; в этом процессе происходит всплеск частоты от субрезонансного к резонансному значению в режиме «рост – достижение максимума $p = p_* = p_r$ – убывание».

II. $p_* = p_r$, $p_\infty = 2p_r$; достижение $p = p_r$ происходит со стороны сверхрезонансных частот в режиме «убывание – рост».

III. $p_\infty = p_r$, $p_* = p_r/2$; $p(t)$ изменяется в режиме «убывание в область субрезонансных частот – достижение минимума p_* – рост до $p = p_\infty = p_r$ ».

IV. $p_\infty = p_r$, $p_* = 2p_r$; изменение $p(t)$ происходит в режиме «рост в область сверхрезонансных частот – достижение максимума p_* – убывание до $p = p_\infty = p_r$ ».

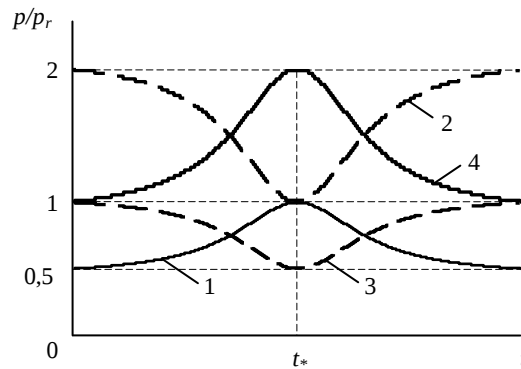
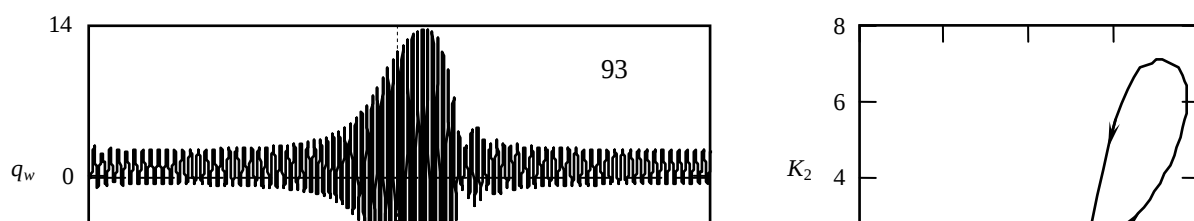


Рис. 3. Переменная частота $p(t)$ возбуждающих колебаний теплового потока.
Номера линий 1 – 4 соответствуют режимам I – IV:
— – I, IV; - - - - II, III

Расчеты выполнены для керамики (8). Отметим влияние волнового механизма переноса тепла. Наблюдается запаздывающее реагирование теплового потока $q_w(t)$ на возбуждающее воздействие $q_0(t)$, которое иллюстрирует рисунок 4, а: момент $t = t_*$ достижения экстремума частоты $p(t)$ предшествует моменту достижения экстремума амплитуды теплового потока $q_w(t)$ на правой стенке. Здесь были приняты следующие значения входных параметров: $p_\infty = 0,6p_r$; $p_* = p_r = \pi/2$; $t_* = 2 \cdot 10^4$ с; $A_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$; $h = 0,03$ м; $H = 1,8 \text{ Вт/м}^2$. Соответствующая петля частотного гистерезиса на плоскости (p, K_2) «частота – добротность» показана на рисунке 4, б.



а) б)

Рис. 4. Эволюция теплового потока на правой границе и частотный гистерезис в полукрытом тепловом резонаторе. Стрелка указывает направление движения точки вдоль петли гистерезиса с течением времени

Проанализируем зависимость площади S петли от толщины пластины h , длительности всплеска частоты (параметр A_1) и величины всплеска A_* . Таким образом, здесь $S = S(h, A_1)$, либо $S = S(h, A_*)$. Основные результаты этой серии расчетов представлены в таблицах 1 – 4.

Таблица 1

Влияние параметра A_* на площадь петли частотного гистерезиса при $p_* = p_r = \pi/2$

$h \cdot 10^3, \text{ м}$	Параметр $A_* < 0$				Параметр $A_* > 0$			
	$-0,8p_r$	$-0,6p_r$	$-0,4p_r$	$-0,2p_r$	$0,2p_r$	$0,4p_r$	$0,6p_r$	$0,8p_r$
10	0,186	0,202	0,219	0,253	0,213	0,202	0,189	0,165
15	0,191	0,205	0,220	0,255	0,266	0,221	0,197	0,193
20	0,195	0,218	0,235	0,274	0,270	0,232	0,213	0,202
25	0,204	0,221	0,241	0,272	0,284	0,249	0,222	0,209
30	0,223	0,234	0,257	0,287	0,283	0,249	0,229	0,214

Таблица 2

Влияние параметра A_* на площадь петли частотного гистерезиса при $p_* = p_r = \pi/2$

$h \cdot 10^3, \text{ м}$	Параметр $A_* < 0$				Параметр $A_* > 0$			
	$-0,8p_r$	$-0,6p_r$	$-0,4p_r$	$-0,2p_r$	$0,2p_r$	$0,4p_r$	$0,6p_r$	$0,8p_r$
5	6,871	5,578	4,046	2,322	2,011	3,565	4,890	6,173
10	3,853	3,114	2,219	1,254	1,289	2,296	3,142	3,906
15	2,841	2,275	1,603	0,912	0,897	1,602	2,241	2,794
20	2,259	1,767	1,270	0,723	0,719	1,258	1,764	2,210
25	1,879	1,474	1,064	0,603	0,595	1,045	1,469	1,844
30	1,592	1,256	0,892	0,507	0,514	0,907	1,288	1,570

Результаты, приведенные в таблицах 1 и 2, получены при $A_1 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

Левая часть таблицы 1 ($A_* < 0$) получена при удалении возбуждающей частоты от $p = p_r$ в область субрезонансных частот (режим III). Правая часть таблицы 1 ($A_* > 0$) получена при удалении от $p = p_r$ в область сверхрезонансных частот (режим IV).

Видим, что при любых величинах всплеска A_* по обе стороны от резонансной частоты зависимость $S = S(h)$ монотонно возрастающая.

Левая часть таблицы 2 ($A_* < 0$) получена при подходе к $p = p_r$ со стороны сверхрезонансных частот (режим II). Правая часть – при всплеске от субрезонансных частот к частоте $p = p_r$ (режим I). Здесь ситуация иная: при любых всплесках A_* по обе стороны от резонансной частоты функция $S(h)$ монотонно убывающая. При фиксированной толщине пластины зависимость $S = S(A_*)$ определяется

режимом изменения частоты. Так, при $p_\infty = p_r$ (см. табл. 1) имеем: чем больше абсолютное значение всплеска $|A_*|$, тем меньше площадь петли S , т.е. зависимость $S = S(|A_*|)$ монотонно убывающая при любом значении h . В случае, когда $p_* = p_r$ (см. табл. 2), зависимость $S = S(|A_*|)$ монотонно возрастающая.

Таблица 3

Влияние параметра A_1 на площадь петли частотного гистерезиса при $p_\infty = p_r = \pi/2$

$h \cdot 10^3, \text{ м}$	$A_* = -0,4p_r$				$A_* = 0,4p_r$			
	Значение параметра $A_1, \text{ с}^{-1}$				Значение параметра $A_1, \text{ с}^{-1}$			
	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$
10	0,151	0,219	0,299	0,378	0,146	0,202	0,247	0,342
15	0,150	0,220	0,309	0,415	0,151	0,221	0,313	0,409
20	0,154	0,235	0,340	0,454	0,153	0,232	0,336	0,456
25	0,149	0,241	0,355	0,499	0,155	0,249	0,365	0,519
30	0,158	0,257	0,386	0,562	0,156	0,249	0,378	0,539

Таблица 4

Влияние параметра A_1 на площадь петли частотного гистерезиса при $p_* = p_r = \pi/2$

$h \cdot 10^3, \text{ м}$	$A_* = -0,4p_r$				$A_* = 0,4p_r$			
	Значение параметра $A_1, \text{ с}^{-1}$				Значение параметра $A_1, \text{ с}^{-1}$			
	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$
5	2,530	4,046	4,641	4,905	2,079	3,565	4,190	4,473
10	1,324	2,219	2,648	2,803	1,401	2,296	2,681	2,802
15	1,010	1,603	1,904	2,003	0,987	1,602	1,891	2,001
20	0,817	1,270	1,505	1,596	0,815	1,258	1,473	1,565
25	0,701	1,064	1,236	1,309	0,691	1,045	1,211	1,281
30	0,607	0,892	1,053	1,110	0,620	0,907	1,058	1,113

В таблице 3 рассматривается отклонение от резонансного режима $p_\infty = p_r$ в область сверхрезонансных частот. Зависимость $S(h)$ здесь монотонно возрастающая при любом $A_1 \geq 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, а при $A_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ площадь петли практически не чувствительна к изменению толщины пластины.

В таблице 4 рассматривается выход на резонансный режим $p_* = p_r$ со стороны субрезонансных частот. Здесь зависимость $S(h)$ монотонно убывающая при любом фиксированном значении A_1 . Вместе с тем при каждой фиксированной толщине h образца зависимость $S = S(A_1^{-1})$ монотонно убывающая: чем меньше длительность всплеска, тем сильнее выражен частотный гистерезис (см. табл. 3, 4). Этот результат сохраняется при всех A_* . Отметим, что частотный гистерезис более выразителен, когда частота изменяется в соответствии с режимами I или II, т.е. когда $p_* = p_r$.

Перечисленные обстоятельства важны при экспериментальном наблюдении вынужденных тепловых колебаний в локально-неравновесных условиях.

В заключение исследования можно сделать следующие **выводы**:

1. Для теплового резонатора существенными факторами влияния на поведение резонансной кривой являются длительность паузы между импульсами излучения и толщина образца. В отсутствие пауз имеем одну резонансную частоту $p_r = \omega_1/2$. При наличии пауз между импульсами появляются одна либо две пары дополнительных резонансных частот. Добротность на резонансной частоте p_r не зависит от длительности паузы.

2. Площадь петли частотного гистерезиса на плоскости «частота – добротность» обладает сильной чувствительностью по следующим параметрам:

а) толщина образца – зависимость $S(h)$ монотонно убывающая для режимов I, II и монотонно возрастающая для режимов III и IV;

б) величина отклонения частоты от ее стационарного значения – функция $S = S(|A_*|)$ монотонно возрастающая для режимов I, II и монотонно убывающая для режимов III и IV;

в) длительность всплеска частоты – чем меньше эта длительность, тем резче выражен гистерезис.

3. Несмотря на существенные количественные различия между теплофизическими параметрами в примерах (7) и (8) наблюдаются одинаковые качественные закономерности поведения системы «среда – поверхностный источник энергии».

Работа выполнена под научным руководством профессора О.Н. Шабловского.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рост энергии и добротности нелинейного резонатора с усилением его потерь / О.В. Руденко [и др.] // Доклады Российской Академии Наук. – 2002. – Т. 383, № 3. – С. 330 – 333.
2. Шабловский, О.Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах / О.Н. Шабловский. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2003. – 382 с.
3. Shablovsky, O.N. Free oscillations of large amplitude in a heat resonator / O.N. Shablovsky, I.A. Kontsevoy // Physics of Shock Waves, Combustion, Detonation and Non-Equilibrium Processes. – Minsk, 2005. – P. 157 – 158.
4. Шабловский, О.Н. Большие собственные колебания теплового резонатора / О.Н. Шабловский, И.А. Концевой // Материалы, Технологии, Инструменты. – 2006. – Т. 11, № 2. – С. 9 – 14.
5. Шабловский, О.Н. Гистерезисные свойства вынужденных колебаний теплового резонатора / О.Н. Шабловский, И.А. Концевой // Материалы, Технологии, Инструменты. – 2008. – Т. 13, № 1. – С. 5 – 11.
6. Шабловский, О.Н. Нелинейные свойства вынужденных колебаний локально-неравновесного теплового поля / О.Н. Шабловский, И.А. Концевой // Тепловые процессы в технике. – 2010. – Т. 2, № 6. – С. 267 – 274.
7. Jou, D. Extended irreversible Thermodynamics / D. Jou, J. Casas-Vazquez, G. Lebon. – Berlin: Springer, 1996. – 383 p.
8. Коробейников, В.П. Задачи теории точечного взрыва / В.П. Коробейников. – М.: Наука, 1985. – 400 с.
9. Heat capacity and equilibration time near T_c of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ / A.V. Voronel [and al.] // Physica C. – 1988. – V. 153 – 155. – P. 1083 – 1088.
10. Теплофизические свойства высокотемпературных сверхпроводников $\text{Y}_{0,8} - \text{Sm}_{0,2} - \text{Ba}_2 - \text{Cu}_3 - \text{O}_{7-x}$ в диапазоне температур 4,2 – 380 К / Б.Б. Бойко [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 1990. – Т. 58, № 5. – С. 709 – 714.

Поступила 06.01.2011

RESONANCE AND HYSTERESIS EFFECT AT IMPULSE-PERIODICAL AGITATION OF OSCILLATIONS IN A LOCALLY NONEQUILIBRIUM MEDIUM

I. KONTSEVOY

Forced thermal oscillations in a system “locally nonequilibrium medium – surface energy source” are studied theoretically. Resonance and hysteresis properties of this system are studied in details. Essential factors of the resonance curve behaviour are the duration of a pause between radiation impulses and the sample thickness. It's shown that the area of the frequency hysteresis loop on the plane “frequency – goodness” strongly depends on sample thickness, deviation of the frequency from its stationary value, and duration of the frequency jump. Besides the hysteresis is displayed as stronger as the duration of the mentioned jump is.