Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXII, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. И. БАРЕНБЛАТТ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 4 IV 1950)

Рассмотрим уравнение

$$y'' + \lambda q(x) = 0, \tag{1}$$

где $q(x)$ удовлетворяет условиям: 1) $q(x) \geqslant 0$, $q(x)$ может быть равно нулю лишь при $x = 0$; 2) $q(x)$ имеет непрерывную вторую производную везде, кроме, быть может, точки $x = 0$; 3) вблизи начала координат $q(x) = a_0 x^m [1 + R(x)]$, $R(x) \to 0$ при $x \to 0$, $m \geqslant 0$.

Пусть $y = \varphi(x; \lambda)$ — интеграл уравнения (1), удовлетворяющий условиям: $\varphi(0, \lambda) = \sin\alpha$, $\varphi'_x(0, \lambda) = -\cos\alpha$ ($\alpha = \mathrm{const}$, $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 0$). Пусть далее $f(x)$ непрерывна и такова, что существует интеграл $\int\limits_0^\infty f^2 q\, dx$.

Тогда можно показать, что существует монотонная, неубывающая функция $\rho(\lambda)$, не зависящая от $f(x)$, и функция $F(\lambda) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int\limits_0^n f(x)\varphi(x, \lambda) q(x)\, dx$ так, что $\int\limits_0^\infty f^2(x) q(x)\, dx = \int\limits_0^\infty F^2(\lambda)\, d\rho(\lambda)$.

Отсюда легко получить, что если $\int\limits_0^\infty F(\lambda)\varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda)$ сходится абсолютно и равномерно, то

$$f(x) = \int\limits_0^\infty F(\lambda)\varphi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda). \tag{2}$$

Б. М. Левитан [1] указал новый метод изучения рассматриваемых разложений, который состоит в том, что вводится второй конец $x = b$ и изучаются пределы соответствующих разложений на конечном промежутке $(0, b)$ при $b \to \infty$. Пользуясь этим методом, укажем признак непрерывности спектра оператора $\frac{1}{q(x)} \frac{d^2}{dx^2}$ и одновременно дадим способ построения $\rho(\lambda)$ для этого случая. Предварительно дадим асимптотические выражения для решений уравнения (1).

Пусть при $x = \delta$ (δ — малое положительное число) $y = \varphi(\delta, \lambda) = y_1$, $y' = \varphi'_x(\delta, \lambda) = y'_1$. Полагая $\xi = \sqrt{\lambda} \int\limits_\delta^x \sqrt{q}\, dx$, $\eta = \lambda^{1/4} q^{1/4}(x)\, y$, преобразуем уравнение (1) в уравнение

$$\eta'' + \eta = R(x)\, \eta \lambda^{-1} q^{-1/2}, \tag{3}$$

где $R(x) \sqrt{q}\, [q''(4q^2)^{-1} - 5q'^2(16q^3)^{-1}]$. Решением уравнения (3), удовлетворяющим при $x = \delta$, т. е. $\xi = 0$, условиям $\eta = \eta_1 = \lambda^{1/4} q^{1/4}(\delta)\, y_1$,

$d\eta/d\xi = \eta_1' = {}^1/_4\lambda^{-1/_4}q^{-5/_4}(\delta)\,q'(\delta)\,y_1 + \lambda^{-1/_4}q^{-1/_4}(\delta)\,y_1'$, будет $\eta(x) = \eta_1\cos\xi(x) + \eta_1'\sin\xi(x) + \lambda^{-1/_2}\int\limits_\delta^x R(t)\,\eta(t)\sin[\xi(x)-\xi(t)]\,dt$. Титчмарш показал ([2]), что если $q'(x) = O\{[q(x)]^c\}$, $0 < c < {}^3/_2$, q'' не меняет знака, то $\int\limits_\delta^\infty |R(x)|\,dx$ существует и $\eta(x)$ ограничена равномерно по λ при $\lambda > \rho > 0$. Т. е., если $q(x)$ удовлетворяет этим условиям, то интеграл $\int\limits_\delta^\infty R(t)\,\eta(t)\sin[\xi(x)-\xi(t)]\,dt$ сходится, и мы получаем искомые асимптотические выражения: $y(x) = \lambda^{-1/_4}q^{-1/_4}(x)\{\mu(\lambda)\cos\xi(x) + \nu(\lambda)\sin\xi(x) + o(1)\}$,

$$\mu = \eta_1 + \lambda^{-1/_4}\int\limits_\delta^\infty R q^{1/_4} y \sin\xi(t)\,dt, \quad \nu = \eta_1' + \lambda^{-1/_4}\int\limits_0^\infty R\, q^{1/_4} y\cos\xi(t)\,dt.$$

Теорема 1. *Если $q(x)$ удовлетворяет условиям 1) — 3), $q'(x) = O\{[q(x)]^c\}$, $0 < c < {}^3/_2$, q'' не меняет знака и $\int\limits_0^\infty \sqrt{q}\,dx$ расходится, то спектр оператора $\frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2}$ непрерывен для $\lambda \geqslant 0$.*

Наметим вкратце доказательство этой теоремы. Рассматривая вронскиан двух линейно независимых решений уравнения (1), легко показать, что μ и ν не могут одновременно обратиться в нуль. Введем второй конец $x = b$ и на нем условие $y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$. При $b \to \infty$ это условие запишется в виде

$$\mu_1\cos\xi(b) + \nu_1\sin\xi(b) = o(1), \tag{4}$$

где $\mu_1 = \mu\cos\beta - \mu\sin\beta\,[4q(b)]^{-1} + \lambda^{1/_2}q^{1/_2}(b)\nu\sin\beta$; $\nu_1 = \nu\cos\beta - \nu\sin\beta\,[4q(b)]^{-1} - \lambda^{1/_2}q^{1/_2}(b)\,\mu\sin\beta$. Очевидно, что одновременное обращение в нуль μ_1 и ν_1 влечет за собой одновременное обращение в нуль μ и ν и потому невозможно. Полагая $\mu_1(\mu_1^2+\nu_1^2)^{-1/_2} = \sin\omega(\lambda)$, $\nu_1(\mu_1^2+\nu_1^2)^{-1/_2} = \cos\omega(\lambda)$, запишем условие (4) в виде

$$\sin\left[\omega(\lambda) + \sqrt{\lambda}\int\limits_\delta^b \sqrt{q}\,dx\right] = o(1). \tag{5}$$

Если λ_k и λ_{k-1} — последовательные корни уравнения (5), то $\sqrt{\lambda_k}\int\limits_\delta^b\sqrt{q}\,dx + \omega(\lambda_k) = o(1) + k\pi$; $\sqrt{(\lambda_{k-1})}\int\limits_\delta^b\sqrt{q}\,dx + \omega(\lambda_{k-1}) = o(1) + (k-1)\pi$. Отсюда и из непрерывности $\omega(\lambda)$ следует, что

$$\sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_{k-1}} = \pi\left[\int\limits_\delta^b\sqrt{q}\,dx\right]^{-1} + o\left\{\left[\int\limits_\delta^b\sqrt{q}\,dx\right]^{-1}\right\}.$$

Построим теперь $\rho(\lambda)$. При $b \to \infty$

$$\rho_b(\lambda+\Delta) - \rho_b(\lambda) = \sum_{\lambda\leqslant\lambda_k\leqslant\lambda+\Delta}\frac{1}{\int\limits_0^b\sqrt{q}\,\varphi^2(x,\lambda_k^b)\,dx} =$$

$$= \sum(\lambda_k - \lambda_{k-1})\left\{\frac{\int\limits_0^b\sqrt{q}\,dx}{\frac{(\sqrt{\lambda_k}+\sqrt{\lambda_{k-1}})\,\pi}{2\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^b\sqrt{q}\,dx\,(\mu^2+\nu)} + o(1)\right\} \to \int\limits_\lambda^{\lambda+\Delta}\frac{d\lambda}{\pi(\mu^2+\nu^2)}.$$

В случае, если выполнены все условия теоремы 1, кроме расходимости $\int\limits_0^\infty \sqrt{q}\,dx$, спектр, очевидно, будет дискретным.

Рассмотрим теперь уравнение теплопроводности в турбулентно движущейся жидкости

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[A(z)\frac{\partial T}{\partial z}\right] = u(z)\frac{\partial T}{\partial t}. \qquad (6)$$

Полагая $dz / A(z) = dx$, приведем (6) к виду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = q(x)\frac{\partial T}{\partial t}, \text{ где } q(x) = A(z)\,u(z). \qquad (7)$$

Полагая, далее, $\sqrt{q}\,dx = dy$, приведем (7) к виду

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{q(x)}\frac{\partial T}{\partial y}\right] = \sqrt{q(x)}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (8)$$

— уравнению теплопередачи для „эквивалентного" стержня, температуропроводность которого равна единице. Ясно, что условие непрерывности спектра, данное нами в теореме 1, является условием бесконечности эквивалентного стержня.

Пусть $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Решая уравнение (7) при условиях

$$T(x, 0) = f(x), \qquad T(0, t)\cos\alpha + \frac{\partial T}{\partial x}(0, t)\sin\alpha = 0, \qquad (9)$$

по методу Фурье получим, что $T = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\ M(\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\,d\lambda$, где $M(\lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(x) = \int\limits_0^\infty M(\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\,d\lambda. \qquad (10)$$

Сравнивая (10) и (2) получаем $M(\lambda) = \frac{1}{\pi}\,F(\lambda)\,(\mu^2 + \nu^2)^{-1}$. Искомым решением уравнения (7) будет $T = \int\limits_0^\infty f(\xi)\,q(\xi)\,d\xi \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,\varphi(x, \lambda)\,\varphi(\xi, \lambda) \times$ $\times (\mu^2 + \nu^2)^{-1}\,d\lambda$, так как интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,\varphi(x, \lambda)\,\varphi(\xi, \lambda)\,(\mu^2 + \nu^2)^{-1}\,d\lambda$ сходится абсолютно и равномерно. Легко видеть, что физический смысл $\Phi(x, t, \xi) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,\varphi(x, \lambda)\,\varphi(\xi, \lambda)\,(\mu^2 + \nu^2)^{-1}\,d\lambda$ — распространение со временем порции тепла, равной единице, из точки $x = \xi$ эквивалентного стержня, где она была сосредоточена в начальный момент, при условии (9) на конце стержня. Замечая это, получим решения уравнения (7), удовлетворяющие условию

$$T(x, 0) = 0 \qquad (11)$$

и одному из условий

$$T(0, t) = \varphi(t), \qquad (12)$$

$$\partial T(0,t) / \partial x = -f(t). \qquad (13)$$

Продолжим эквивалентный стержень симметрично на отрицательную полуось. В случае симметричного относительно начала координат начального распределения тепла надо выбирать $\varphi = \varphi_1(x, \lambda)$ так, что $\varphi_1(0, \lambda) = 1$, $\varphi'_{1x}(0, \lambda) = 0$; в случае антисимметричного — так, чтобы $\varphi_2(0, \lambda) = 0$; $\varphi'_{2x}(0, \lambda) = 1$. Возьмем симметричное начальное распределение, отвечающее начальному сосредоточению в окрестности начала координат порции тепла, равной 2 единицам: $f(\xi) = 0$, $|\xi| > h$; $f(\xi) = (a_0 h^{m+1})^{-1}$, $|\xi| < h$. Устремляя h к нулю, получим „первое основное решение“ $T_q^1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi_1(x, \lambda)\left(\mu_1^2 + \nu_1^2\right)^{-1} d\lambda$. Отсюда видно, что решением уравнения (7) при условиях (11) и (13) будет:

$$T = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \int\limits_0^\infty e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi(x, \lambda)\left(\mu_1^2 + \nu_1^2\right)^{-1} d\lambda.$$

Вполне аналогично получим второе основное решение, отвечающее помещению в начале координат теплового диполя мощностью в 2 единицы: $T_q^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi_2(x, \lambda)\left(\mu_2^2 + \nu_2^2\right)^{-1} d\lambda$.

Итак, решением уравнения (7) при условиях (11) и (12) будет:

$$T = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \int\limits_0^\infty e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi_2(x, \lambda)\left(\mu_2^2 + \nu_2^2\right)^{-1} d\lambda.$$

Пример. Пусть $q(x) \equiv x^m$, тогда соответствующие решения суть:

$$T_1 = \left[\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)\right]^{-1}\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau \int\limits_0^\infty \exp\left[-\lambda^{m+2}(t-\tau)\right] \times$$

$$\times \sqrt{x} J_{-\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\lambda x)^{\frac{m+2}{2}}\right](m+2)^{\frac{1}{m+2}}\lambda^{m+\frac{1}{2}}\, d\lambda =$$

$$= \left[\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)\right]^{-1}\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau\, (t-\tau)^{-\frac{m+1}{m+2}}\exp\left[-\frac{x^{m+2}}{(m+2)^2(t-\tau)}\right]\frac{1}{(m+2)^{\frac{m}{m+2}}};$$

$$T_2 = x(m+2)^{\frac{m+1}{m+2}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)\right]^{-1}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \times \int\limits_0^\infty \exp\left[-\lambda^{m+2}(t-\tau)\right] \times$$

$$\times\ \lambda^{m+3/2}x^{-1/2}J_{\frac{1}{m+2}}\left[\frac{2}{m+2}(\lambda x)^{\frac{m+2}{2}}\right]d\lambda =$$

$$= \frac{x}{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \exp\left[-\frac{x^{m+2}}{(m+2)^2(t-\tau)}\right](t-\tau)^{-\frac{m+3}{m+2}}\frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}}.$$

В частности, при $m = 0$ получаем известные решения уравнения теплопроводности.

В заключение работы приношу искреннюю благодарность проф. Б. М. Левитану и проф. Л. И. Седову.

Поступило
20 III 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям..., М.–Л., 1950.
[2] E. C. Titchmarsh, Eigenfunctions Expansions..., Oxford, 1946.